

VI A

A Treatise on Hydromechanics Pt. I Hydrostatics

by

W H BISANT & A S RAMSEY

ہاسکویات

ترجمہ

ہواوی محمد بدیر الدین، ایم۔ اے۔

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_188182

UNIVERSAL
LIBRARY

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ماسکونیات

تصنیف

ڈبلیو۔ ایچ۔ بسینٹ ایس۔ سی۔ ڈی، ایف۔ آر۔ ایس

و

اے۔ ایس۔ ریفرے، ایم۔ اے

مترجمہ

محمد زید الدین، ایم۔ اے (عثمانیہ)

رکن دارالترجمہ جامعہ عثمانیہ سرکاری

۱۳۲۹ھ م ۱۳۳۰ھ م ۱۹۳۱ھ

طبع دارالترجمہ جامعہ عثمانیہ سرکاری

فہرست اغلاط

نوٹ :- مطالعہ سے قبل ان غلطیوں کی تصحیح فرمائیجئے۔

صفحہ	غلط	صفحہ	سطر	صفحہ	صحیح	صفحہ	سطر
۱	پانی	۳	۱۲	۱۶	پانی	۱۲	۱۶
۲	جذی	۱۳	۸	۱۸	جزی	۸	۱۸
۴	اور مارہ	۲۱	۱۱	۶	اور پارہ	۱۱	۶
۵	ریز	۲۱	۲۱	۲۱	زیر	۲۱	۲۱
۳	ہونگیں	۱۹	۶	۲۴	ہونگی	۶	۲۴
۵	ق کا ب	۱۸	۱۳	۲۵	ق کا ب	۱۳	۲۵
۴	س ٹ	۲۱	۱۸	۶	س ٹ	۱۸	۶
۶	گزر نے	۱۰	۸	۳۰	سہ گزرنے	۸	۳۰
۸	ح	۴	۱۲	۱	ح	۱۲	۱
۶	پیش	۱۵	۹	۳۲	پیش	۹	۳۲
۹	پیش	۱۱	۲۰	۶	پیش	۲۰	۶
۴	جز	۱۹	۶	۳۳	جزو	۶	۳۳
۱۰	فشارے	۴	۱۸	۶	فشارے	۱۸	۶
۱۱	ایکائی	۶	۲۰	۶	ایکائی	۲۰	۶
۱۱	اسراع	۶	۲	۳۶	اسراع	۲	۳۶
۴	کچھ	۱۳	۱۱	۶	کچھ	۱۱	۶
۶	حجم	۲۲	۲۰	۳۶	حجم	۲۰	۳۶
۱۳	منجائیں	۴	۲۲	۶	منجائیں	۲۲	۶
۶	(د+مف د)	۱۸	۹	۳۸	(د+مف د)	۹	۳۸
۱۶	مکانی	۶	۱۰	۶	مکانی	۱۰	۶

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۳۹	۶	ذن	ذن	۷۴	۲۱	حاصل بردن	حاصل ضربوں
۴۳	۵	عن	عن	۷۵	۹	شوت	برستد
۴	۱۵	کمزور	کمزور	۷۶	۲۰	وزن	وزن
۴	۱۷	ک	ک	۷۷	۱۱	یر	پر
۷	۱۹	-	(راہ ہے نکال دیا جائے)	۷۸	۰	و	و
۵۱	۲	ما	ما			(شکل میں)	
۵۲	۳	ج کی	ج کی	۸۰	۱	ب و ج	ب (ج)
۵۳	۳	دوم	دوم	۸۱	۲	دوب	دوب
		(نسب نما میں پہلا)		۸۲	۱۱	دووں زادوں	دو زائدوں
۵۴	۸	ما	ما	۸۱	۸	<	>
۷	۱۵	دائرہ ایک	دائرہ کا ایک	۸۲	۵	ت	ث
۵۷	۲	بہ جم ط	بہ جم ط	۸۳	۱۰	<	>
۷	۵	ب	ب	۸۴	۱۷	کثافت	کثافت
۵	۱۳	مانع ہیں	مانع ہیں	۸۵	۳	قوازیں	قوازیں
۵۸	۱	داؤ	داؤ	۸۶	۹	قانون	قانون
۷	۶	ج	ج	۸۷	۱۵	آدب	آدب
۵۹		د	د	۸۸	۱۱	بھی	بھی
		(دوسری شکل میں)		۸۹	۳	بوجب	بوجب
۶۰	۷	مشابہ	مشابہ	۹۰	۱۳	ھ ، ھ	ھ ، ھ
۶۲	۱۷	استوانہ	استوانہ	۹۱	۱۷	۱/۲ (ب + ج) (ب + ج)	۱/۲ (ب + ج) (ب + ج)
۶۵	۱۹	سیال	سیال	۹۲	۱۷	نکھ	نکھ
۷۲	۲۰	سیال	سیال	۹۳	۶	ق د ق	ق د ق
۷۳	۲۰	د	د	۹۴	۳	طر	دل
۷	۲۰	ے	ے				

صفحہ	سطر	علاظ	صحیح	تصحیف	سطر	غلط	صحیح
۸۹	۷	تیں	تین	۱۳۹	۱۴	و	و
۹۰	۴	ح	سح	۱۴۱	۱۱	ئی	ئی
۹۱	۱۲	ا	ا	۹	۴	اور	اور
۹۲	۱۳	اکالی	اکالی	۱۴۳	۱۲	ترشوں	ترشوں
۹۳	۶	ع	ج	۱۱۵	۹	د	د
۹۴	۱۷	مخروطی	مخروط	۹	۱۹	د. x. م	الطی و م. م
۹۵	۲	تراد	تیراؤ	۱۴۸	۴	ح	ح
۱۰۲	۲۰	ن ق	ن ق	۱۵۱	۳	ناند	ناند
۱۰۶	۱	قائیت کے	قائیت کی	۱۶	۱۵	۲	۲
۱۰۷	۹	نمبر	نمبر	۱۶	۲۲	پوری	پوری
۱۰۸	شکل	ل (اوپر کا)	ل (اوپر کا)	۱۶۸	۷	لی	لی
۱۰۹	۶	مناسب	مناسب	۱۶۹	۱۴	میر	میر
۱۱۰	۱۳	ع	ع	۱۷۰	۲	تین	تین
۱۱۱	۱۲	کے	کے	۱۷۱	۵	رکھ کر	رکھ کر
۱۲۰	۱۷	جب ط	جب ط	۱۷۲	۱۷	ت	ت
۱۲۶	۱	م	م	۱۷۶	۱۱	ج	ج
۱۲۷	۴	ی	ی	۱۸۰	۱	ج	ج
۱۲۹	۳	دج ل	دج ل	۱۸۱	۲۱	م	م
۱۳۰	۱۸	اد پر وار	اد پر وار	۱۸۲	۱۹	پر	پر
۱۳۱	۴	ث م (دوسرا)	ث م	۱۸۳	۱۱	جائے	جائے
۱۳۵	۷	ط	طا	۱۸۷	۲	پہننے	پہننے
۱۳۷	۱۱	ح ث	ح ث	۱۸۸	۱۹	کے	کے
۱۳۷	۴	ح	ح	۱۹۰	۸	ح	ح
۱۳۸	۲۱	لا	لا	۹	۱۱	ح	ح

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۹۰	۱۹	ف : ۳	ف : ۳	۲۵۲	۳	و ا ج با ف	و ا ج با ف
۱۹۲	۱۸	۱ -	۱ -	۲۵۵	۹	ت ۲ -	ت ۲ -
۱۹۳	۱۸	م فنجی	م فنجی	۲۹۰	۴	فرس فرس ۲	فرس فرس ۲
۱۹۹	۱۸	(("	۱۵	صفر	صفر
۲۰۵	۵	ح	ح	"	"	فرس	فرس
"	۱۳	رکھیکا	رکھیکا	۲۹۲	۲	ب ج	ب ج
۲۱۲	۱۵	ستدیر	ستدیر	۲۶۹	۴	+	+
۲۱۳	۱	و ن ن	و ن ن	۲۸۴	۱۴	تو	تو
"	۲	تو تو	تو تو	۲۸۶	۶	Darboux	Darbou
"	۲۵	جم جم	جم جم	۲۸۸	۹	Britannica	Britannica
۲۱۶	۸	ف - ا	ف - ا	۲۹۲	۳	Britannica	Britannica
"	۱۵	(("	۶	Über die	über der
۲۱۵	۱	ب	ب	۲۹۹	۱	"	"
۲۲۱	۱۷	م ۲ -	م ۲ -	۳۰۳	۶	(دریائی)	(کالایا جائے)
۲۲۲	شکل	شکل	شکل	۳۰۹	۱۳	(لا + ۹)	(لا + ۹)
۲۲۵	۳	میں سے	میں سے	۳۱۵	۱۲	نقل	نقل
۲۲۷	۲۰	جن م	جن م	۳۱۶	۱	اس حرکت صرف	اس حرکت صرف
۲۲۸	۱	جن م	جن م	"	۷	سال	سال
۲۲۹	۸	ت م دح	ت م دح	۳۱۸	۱۷	مینجن	مینجن
۲۳۱	۹	م ۲	م ۲	۳۲۲	۵	کر	کر
۲۳۲	۳	جن م	جن م	<p>نوٹ :- صفحہ ۱۳ پر پہلی سطر کے بعد صوبے کی جابجائی کرنا کرکھنا</p> <p>" نیز م کے ہٹاؤ کی وجہ سے جسم کے وزن کے</p> <p>سمایا کا نقصان = (ر م ل - گ) ط "</p>			
۲۴۰	۵	-	-				
۲۵۰	۱	د	د				
۲۵۱	۱۶	دو عمل	دو عمل				

فہرست مضامین ماسکونیات باب اول

صفحہ

۱

۱۰

دفعات

۱ - ۱۴ تعریفات - دباؤ کا مساوی ہونا - دباؤ کا انتقال - کشافت کا ناپ
اشدہ

باب دوم

۱۳

۱۹

۲۸

۳۰

۳۲

۱۵ - ۲۰ توازن کی شرط
۲۱ - ۲۴ مساوی دباؤ کی سطحیں
۲۴ غیر متجانس مارن
۲۸ - ۲۹ مثالیں
۳۰ - ۳۲ گھومنے والے سیال

باب سوم

۳۳-۳۴ حاصل دباؤ۔ دباؤ کے مرکز

اشک

باب چہارم

۴۸-۵۵ تیرنے والے جسم کا توازن۔ اچھال کی سطح۔ توازن کے محل

۵۶-۶۴ خاص صورتوں میں اچھال کی سطحیں

اشک

باب پنجم

۶۵-۷۳ توازن کی قائمیت۔ پس مرکز

۷۴ ڈیوپن کا مسئلہ

۷۵ لیکرٹ کا مسئلہ

۷۶ بار میں اضافہ

۷۷ پیچ کا اثر جازبہ

۷۸-۷۹ اچھال کی سطح بالعموم

۸۰ تیرا دی سطح۔ لیکرٹ کا مسئلہ

۸۱ مثالیں

۸۲-۸۹ محدود ہشاؤ۔ قید کی صورتیں

۹۰-۹۲ غیر متجانس مائع

دفعات

۹۳-۱۰۵ توانائی کے حصول کا اطلاق

امثلہ

صفحہ

۱۳۴

۱۵۰

باب ششم

۱۰۶-۱۰۸ تیرنے والے اجسام کے اہم تر اثرات

امثلہ

۱۶۷

۱۷۳

باب ہفتم

۱۰۹-۱۱۱ کلیہ بائل - پیش مطلق

۱۱۲-۱۲۱ گیہوں کا آمیزہ - شبنم - حرارت نوعی

۱۲۲-۱۲۹ کرہ جوانی - ارتقاہوں کا معلوم کرنا

امثلہ

۱۷۸

۱۸۲

۱۹۰

۲۰۳

باب ہشتم

۱۳۰-۱۳۲ لاکھ طلیں کا تناؤ

۱۳۳-۱۳۷ نویہ اور لدنیہ

۱۳۸-۱۵۵ تناؤ اور دباؤ

امثلہ

۲۱۱

۲۱۳

۲۲۲

۲۴۱

باب نہم

۱۵۶-۱۵۹ استوار یا لچکدار پتھر

۲۴۸

صفحہ

۲۵۲

۲۵۵

دفعات

۱۹۲-۱۹۰ نویسیہ

امثلہ

باب دہم

۲۵۷

۲۶۷

۲۷۲

۲۸۰

۲۸۱

۲۹۳

۱۶۹-۱۶۳ سطحی تناؤ - شعاری سخنی

۱۷۱-۱۷۰ متوازی تختیاں

۱۷۲-۱۷۱ مارنے کے قطرے

۱۷۵ تیرنے والی سوئی

۱۷۶-۱۸۵ مانع کی جلیاں

امثلہ

باب یازدہم

۳۰۵

۳۱۷

۳۲۵

۳۲۶

۳۲۷

۳۳۲

۳۳۹

۱۸۶-۱۹۳ گھومنے والے لکھ کی کھیت کا اضافی توازن،

زمین کی شکل پر اطلاق

۱۹۴-۲۰۰ جیکوبی کا مسئلہ

۲۰۱ ناقصی اسطوانہ

۲۰۲ پروانکارے کا مسئلہ

۲۰۳ توازن کی اور شکلیں

امثلہ

متفرق مثالیں

ماسکونیات

باب اوّل

۱۔ ہم عام تجربہ سے یہ معلوم کرتے ہیں کہ ایسی اشیا میں جیسے ہوا اور پانی ہیں یہ خواص ہائے جاتے ہیں کہ ان کے مادہ کے حصے ایک دوسرے سے نہایت آسانی کے ساتھ علیحدہ نہیں کیے جاسکتے ہیں اور بغیر پذیرگی کی ان میں انتہائی قابلیت ہے۔ ان خواص کی توضیح مختلف عام واقعات سے ہو سکتی ہے۔ مثلاً سبب چیزیں آسانی ایک دوسرے کے اندر داخل ہو جاتی ہیں ایک سیال کی بہت کم مقدار کو دوسرے سیال کی بہت بڑی مقدار میں شامل کرنے سے انکو انتہائی طور پر لطیف بنایا جاسکتا ہے۔ ہوا پمپ کے ذریعہ ہوا کو بہت رفیق کیا جاسکتا ہے اور اسی طرح کے دوسرے واقعات سے یہ واضح ہوتا ہے کہ عملی طور پر سیال کی قیمت پذیرگی غیر محدود ہے اور یہ بھی معلوم ہو جاتا ہے کہ سیال کے حصول کو ایک دوسرے سے حد کر کے بہت ہی قلیل مزاہمت محسوس ہوتی ہے۔ اور عام طور پر قابل نظر انداز۔ ان مشاہدات کی تعمیم سے خود بخود ہم ایسی شے کا خیال کر سکتے ہیں کہ جس میں یہ خواص بدرجہ اتم موجود ہوں جو کم یا زیادہ ہر سیال عام میں پائے جاتے ہیں۔ اس لئے ہم ذیل کے نتیجہ پر پہنچتے ہیں۔

سیال کال کی تعریف

۲۔ سیال کال ایسے ذرات کا مجموعہ ہوتا ہے جو خفیف ترین قوت کے زیر عمل فوراً ایک دوسرے سے جدا ہو جاتے ہیں۔ اس طرح اگر ایک لا انتہائی پلاسٹک سیال اس قسم کے سیال کو کسی سمت میں تقسیم کرے تو اس عمل تقسیم میں کوئی مزاہمت وقوع پذیر نہ ہوگی

اور مستوی پر سیال کا دباؤ صرف عمودی سمت میں عمل کرے گا۔ یعنی سیال کامل میں لزوجیت معدوم فرض کی جاتی ہے اور رگڑ کی قسم سے کوئی قوت عمل نہیں کرتی۔
اس طرح تعریف شدہ بالائے سیال کی بنیادی خاصیت حسب ذیل قرار پاتی ہے۔
سیال کامل کا دباؤ ہمیشہ اُس سطح پر عمود وار عمل کرتا ہے جس کے ساتھ اس کا تماس ہو۔

دراصل کوئی سیال ایسا نہیں ہے کہ جس پر اعمال تقسیم یا تفصیل سے کم و بیش فرسخت محسوس نہ ہوتی ہو۔ لیکن جس طرح کہ استواری جسم پر معدوم قدرت کے ایسے اجسام سے حاصل ہوتا ہے مثلاً شکل میں ذرا سی تبدیلی بہت بڑی قوت کے استعمال سے پیدا ہوتی ہے اسی طرح سیال کا کل کام معدوم ایسی چیزوں کے مشابہہ سے حاصل ہوتا ہے جن میں یہ خاصیت ہو کہ ان کے اجزا جیسا آسانی سے جدا ہو سکیں اور دیکھنے میں عمل تقسیم درجہ انہائی تک ہو سکے۔
تمام سیال خواہ ان کا درجہ لزوجیت کچھ ہی ہو ذیل کی تعریف میں آجاتے ہیں۔
سیال ایسے ذرات کا مجموعہ ہے جو خفیف ترین قوت کے اثر کو قبول کر لیتے ہیں۔
جہاں کے جدا کرنے میں کافی عرصہ تک لگائی نہ جائے۔

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ساکن لزج سیال میں ماسی تعامل یا جذبی مٹاؤ نہیں ہوتا۔ اور اس لئے سیال کامل کی طرح کسی ساکن سیال پر دباؤ ہمیشہ اُس سطح پر عمود وار عمل کرتا ہے جو سیال کو مس کرتی ہے۔ اس طرز تمام سیالوں کے لئے بالعموم لزوجیت، علم ساکن سیالات کے تمام مسائل درست ہیں۔

علم حرکت سیالات (ماہرکیات) میں سیال کی لزوجیت کے شامل کرنے سے حرکت کی مساواتیں بہت حد تک بدل جاتی ہیں۔

۲۔ سیالات کی دو قسمیں ہیں۔ مائع اور گیس۔ اول الذکر ایسی مائعات ہیں۔ جیسے پانی اور بارہ جو قابل فدر دب نہیں سکتیں جب تک کہ بہت بڑے دباؤ کے زیر عمل نہ ہوں۔ بخار اور جو آسانی سے دب سکتی ہیں اور آزادانہ طور پر پھیل سکتی ہیں۔
اسلئے بعض اوقات ہم قسم اول کے ریانات کو بے پچک اور قسم دوم کو لچکا کہیں گے۔

۳۔ سیالات پر جاذب ارض کا اثر اسی طرح ہوتا ہے جس طرح دیگر اجسام پر۔ مائع کی صورت میں قویہ ظاہر ہے اور یہ کہ ہوا بھی وزن رکھتی ہے ایک بند برتن کو حتی الامکان ہوا سے

خالی کر کے وزن کرنے سے معلوم ہو سکتا ہے نیز جو ار بھاڑ کے وقوع سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ سیالات بر سوسن اور چاند کی کششیں اسی طرح عمل کرتی ہیں جس طرح کہ زمین کی کشش۔ ان واقعات کی بنا پر نیز اس طرح کے اور واقعات کی بنا پر مان لیا جاتا ہے کہ تمام قسم کے سیالات تانوں تجاؤب کے تابع ہن۔ یعنی اس قانون کے بموجب وہ دوسری مادی اشیاء پر کشش کا عمل کرتے ہیں اور ان پر بھی ان مادی اشیاء کی کشش کا عمل ہوتا ہے۔

سیالی دباؤ کی پیمائش

۵۔ مرض کر کو کہ کچھ سیالی اودہ بعض قوتوں کے زیر عمل ساکن ہے اور ایک مسنوی سطح سیال کے ساتھ تماس رکھتی ہے اور اس کے تحت پر جو سیال کا عمل ہے اس کے خلاف توازن پیدا کرنے کے لئے سطح پر قوت ق لگانی پڑتی ہے۔

اگر سیال کا عمل پر یکساں ہو تو ق سے یہ سیالی دباؤنی اکائی رقبہ تقریباً اگر دباؤ یکساں نہ ہو تو رقبہ اس کے ہر نقطہ پر اسکو متغیر خیال کیا جائیگا اور اگر ایک نقطہ کے گرد کے چھوٹے رقبہ پر قوت عمل کرے تو ق سے تقریباً دباؤ کی شرح رقبہ پر تعبیر ہوگی۔

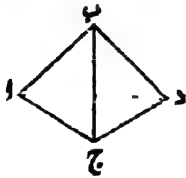
اگر عکولانہا کم کر دیا جائے تو فرض کر کو کہ انتہا میں $d =$ تب بطور تقریب کے اس کو ہم نقطہ زیر بحث پر دباؤ کا پ قرار دینگے۔ وہ قوت ہوگی جو اکائی رقبہ پر لگائی جائیگی اگر اس اکائی رقبہ پر شرح دباؤ یکساں خیال کی جائے اور نقطہ زیر بحث پر کے دباؤ کے مساوی ہو پس اگر کسی نقطہ پر دباؤ d ہو تو اس کے گرد کے چھوٹے رقبہ پر قوت d جہ عمل کریگی جہاں جہ انتہا میں d کے نابالہ میں سفر ہو جاتا ہے جسکے عم (اور اسکی وجہ سے دعام) صفر ہو جائے۔

۶۔ ساکن سیال کے کسی نقطہ پر دباؤ ہر سمت میں وہی ہوتا ہے۔ سیال کے خواص میں یہ خاصیت سب سے اہم ہے اس کا ثبوت سیال کی بنیادی خاصیت سے حسب ذیل طریقہ سے ادا کیا جاسکتا ہے۔

اگر ہم سیال کے ایک چھوٹے ذوربعیہ السطوح کے توازن پر غور کریں تو یہ معلوم ہوگا کہ اس کے دونوں پر کے دباؤ اور اس کی کیت پر کی قوت عالم لکڑ متوازن قوتوں کا ایک نظام پیدا کرتی ہیں۔

اول الذکر قوتیں رخوں کے رقبوں پر منحصر ہونیکلی وجہ سے ایسے ہیلتی ہیں جیسے مجسم (جسکو ہڈیات یا استخوانس فرض کیا گیا ہے) کے کنارے کامریج اور ثانی الذکر قوت جبر اور کشافیت پر پر منحصر ہونے کی وجہ ایسی بدلتی ہے جیسے مجسم کے کنارے کا کمعب۔ اور اس لئے اگر مجسم کو لا انتہا ٹکھنا دیا جائے جیکہ اس کی شکل ہمیشہ متشابہ رہے تو موخر الذکر قوت بمقابلہ رخوں پر کے دباؤ کے معدوم ہو جاتی ہے۔ اور اس لئے یہ دباؤ خود متوازن قوتوں کا ایک نظام پیدا کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ رخوں و ب ج اور ب ج د پر کے دباؤ کی شرحیں علی الترتیب د کے تعبیر ہوتی ہیں کنارے و د کے متوازی ان قوتوں کو تحلیل کرو۔ تو چونکہ رقبہ و ب ج اور ب ج د کے ظل و د پر کے علی القیام مستوی پر وہی ہیں (فرض کرو کہ ہر ایک عد کے مساوی ہے)۔



$$\therefore دے = دے$$

$$\text{یعنی } د = د$$

اور اسی طرح یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ دوسرے دو رخوں پر کے دباؤ میں سے ہر ایک د یا د کے مساوی ہے۔

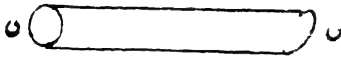
اب چونکہ دو اربعۃ السطوح کے رخ کسی سمت میں لئے جاسکتے ہیں اس لئے کسی نقطہ پر کا دباؤ ہر سمت میں وہی ہوتا ہے۔

یہ مسئلہ اس وقت بھی درست رہتا ہے جبکہ سیال ہنترک ہو۔ کیونکہ ڈی ایلمبرٹ کے اصول کے مطابق اگر موثر قوتوں کی سمت الٹ دی جائے تو یہ بیردنی یا عالمہ قوتوں کے ساتھ مل کر رخوں پر کے دباؤ کے ساتھ متوازن ہونگیں۔ اور موثر قوتیں اسی رتبہ کی چھوٹی مقداریں ہیں جس رتبہ کی عامل قوتیں اور اس لئے بمقابلہ دباؤں کے معدوم ہو جاتی ہیں۔
۷۔ مسئلہ بالا کا حسب ذیل ثبوت کو شبہ کی مثالوں سے لیا گیا ہے۔

فرض کرو کہ ن اور ق سیال میں ایک دوسرے سے محدودا صلیے پر دو نقطے ہیں۔ محو ن ق کے گرد ایک بہت چھوٹے نصف قطر کا اسطوانہ بناؤ۔ ق میں سے ایک مستوی ن ق کے علی القیام کھینچو اور ن میں سے کوئی مستوی گزارو اور ن ق کی کیت کے توازن پر غور کرو۔

اس کے سرسوں پر کے دباؤ اور منحنی سطح کا دباؤ اور وہ سیر دنی قوتیں جو اس پر عمل کرتی ہیں ایک متوازن قوتوں کے نظام کو تعبیر کرتی ہیں۔

فرض کرو کہ دباؤ نقاط اور نیر کے دباؤ ہیں۔ اور اسطوانہ کی تراش ق کا رقبہ عہ اور تراش ن کا رقبہ عہ ہے۔



بخ ن پر کے دباؤ د عہ کو اگر اسطوانہ کے محور کے متوازی تحلیل کریں تو جزو تحلیل د عہ کے مساوی ہے۔ اور اسلئے

د عہ - د عہ = فی ن کے متوازی قوت عالمہ کا جزو تحلیل

نقطہ ن میں سے گزرنے والے مستوی کی سمت خواہ کچھ ہی ہو یہ قوت عالمہ جبکہ اسطوانہ کا نصف لا انتہا چھوٹا ہو بالآخر اسطوانے کے حصے ق ن پر کی قوت عالمہ کے مساوی ہو جاتی ہے جبکہ یہ حصہ ایسے مستوی کے ذریعہ کاٹا جائے جو نقطہ ن میں سے گزرے اور محور پر عمود ہو۔ پس قوت عالمہ ہے

کس ن عہ فلا

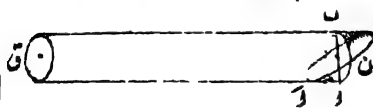
جہاں کس وہ قوت ہے جو سیالی ذرہ ک برتلق سے فاصلہ لا پر عمل کرتی ہے۔ اسلئے

$$د = د + کس ن عہ فلا$$

۱۱ حسب ذیل تشریح جوت کے اس حصہ کو مکمل کر دے گی۔

فرض کرو کہ دباؤ ب نقطہ پ میں سے گزرنے والے مستوی ہیں۔ ثقی علی الترتیب ون و اہ بان ب کی اسطواناتیں ہیں۔ سن سیال کے ان حصوں پر عمل کرنے والی قوتوں کے اسرار ہیں۔

تو فی و ب اور ق و ب (جن کے محم مساوی ہیں) ن عہ



= ون و اور بان ب پر عمل برسوالی قوتوں کا فرق

= (سن ثقی - سن ثقی) = حجم ون و

= وفت (سن ثقی) = $\frac{2}{3} \pi r^2 h$ عہ دباؤ ، (عہ تراش ق کا رقبہ ہے)

یعنی دَلفظ ن بں سے گد رنیوالی ستویوں کے لئے مستقل ہے۔

سیالی دباؤ کا انتقال

اگر کسی ساکن مانع کی سطح پر یا اس کے کسی دوسرے حصہ پر دباؤ ڈالا جائے یا اس میں اضافہ کیا جائے تو یہ دباؤ یا اضافہ دباؤ مانع کے سب حصوں میں مساوی طور پر منتقل ہو جاتا ہے۔

سیالوں کی یہ خاصیت بالالاست تجربہ کی بنا پر حاصل ہوئی اور اس طور پر بعض اوقات اسے مان لیا جاتا ہے لیکن ہم سیال کی تعریف سے اسکو اخذ کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ساکن مانع کی سطح میں ن کوئی نقطہ ہے اور سیال کے اندر ق کوئی دوسرا نقطہ ہے۔ خط مستقیم ق کے گرد ایک حجموں نصف قطر کا اسطوانہ بناؤ جو نقطہ ن پر کی سطح اور ق میں گزرنے والے اور ن ق پر علی القوائم مستوی سے محدود ہو۔

اگر نقطہ ن پر کے دباؤ کو بقدر د کے زیادہ کیا جائے اور اسطوانہ پر کی اضافہ شدہ قوت کو اس کے محور کی سمت میں تحلیل کیا جائے تو جزو تحلیل د عدہ کے مساوی ہے جہاں عد اسطوانہ کے محور پر علی القوائم مستوی تراش کا رقبہ ہے اس کے مساوی قوت د عدہ کو سمت ق ن میں نقطہ ق پر عمل کرنا چاہیے کیونکہ مخفی سطح پر سیال کا دباؤ محور کے علی القوائم ہے اس لئے ق پ کا دباؤ بقدر د کے بڑھ جاتا ہے۔

اگر خط مستقیم ن ق پورے طور پر سیال کے اندر واقع۔ سو تو ن اور ق کو مختلف خطوط سے جو بالتمام سیال کے اندر ہوں ملایا جاسکتا ہے۔ اور پھر ثروت بالا کی تکرار سے ثابت ہو سکتا ہے کہ دباؤ د نقطہ ق پر بغیر کسی قسم کی تبدیلی کے منتقل ہو جاتا ہے۔

بقیہ نوٹ صفحہ ۵۔ اور سلسلے

$$d = \frac{2}{3} \times \text{مس ث فلا} + \text{مس ث مفل} \times \text{مس ث مفل}$$

تو تین چونکہ سلسل میں اس لئے آخری رقم مساوات کی دوسری ارقام کے مقابلہ میں مرکباً دوم خیال کیجاتی ہے اور اسلئے د مستقل ہے۔

۹۔ اس خاصیت کی بنا پر رائج کا مادہ مشین کے طور پر قوت کی تضعیف کے لئے استعمال ہو سکتا ہے۔ اگر ایک بانی سے بھرے ہوئے بند برتن میں دو سو رائج کر دئے جائیں اور ان کو خوب ہلکے کرنے والے فشاروں کے اثر سے بند کر دیا جائے اور پھر اگر کوئی قوت Q ایک فشار سے پر لگائی جائے تو دوسرے فشار سے پر ایک ایسی قوت Q لگائی پڑے گی کہ نسبت Q : Q نسبت دباؤ کے مساوی ہو جاوے۔ کیونکہ رقبہ کے ہر نقطہ کے دباؤ میں اضافہ کی شرح رقبہ کے ہر نقطہ پر منتقل ہو جاتی ہے۔ اور اسلئے اگر پر کی قوت اس کے رقبہ پر منحصر ہوتی ہے۔

۱۰۔ ان دونوں فشاروں کا درمیانی عمل برہم کے متساوی ہے اور یہ ظاہر ہے کہ اگر کو بڑھا لے اور اگر گھٹانے سے ہم نسبت Q : Q کو جتنا بڑھا جائے بڑھا سکتے ہیں۔

۱۰۔ یہ دیکھا گیا ہے کہ سیالی کا دباؤ اس کی کثافت اور پیش پر منحصر ہوتا ہے۔ نیز اسکی نوعیت پر تجربہ سے معلوم ہوا ہے کہ اگر پیش مستقل رہے تو دباؤ اس فضا کے بالکل متناسب ہوتا ہے جسکو سیال گھیرے ہوئے ہے یعنی دباؤ ایسے بدلتا ہے جیسے اس کی کثافت۔

اس قانون کو پہلے ہائل نے بیان کیا لیکن یہ اس عام قانون کے نتیجہ کے طور پر اخذ ہو سکتا ہے کہ گیسوں کے کسی آمیزے کا دباؤ جبکہ ان میں کیمیائی عمل نہ ہوتا ہو ایسے دباؤں کا مجموعہ ہوتا ہے جو گیس علیحدہ علیحدہ پیدا کرتی ہیں جبکہ ایک ایک کر کے جدا کا۔ طور پر برتن کو ان سے بھر جائے کیونکہ برتن میں گیس کی مقدار کو دو چند کرنے سے دباؤ بھی دو بند ہو جائیگا اور سیال کے مقدار میں کوئی اور اس قسم کی تبدیلی دباؤ میں اس طرح کی متناسب تبدیلی پیدا کر دیگی۔

اسلئے اگر کسی گیس سیال کی کچھ مقدار کی کثافت D ہو اور اس کا دباؤ d تو جب تک کہ پیش وہی رہے

$$D = d$$

جہاں D مستقل ہے جسکو تجربہ کے ذریعہ اس مخصوص سیال کے لئے کسی معلومہ پیش پر معلوم کرنا ہوگا۔ اگر گیس کا حجم V ہو جبکہ اس کا دباؤ d ہے اور X جبکہ دباؤ d تو

$$d = X$$

لہذا جبکہ سیالی ائمانت کی اس خاصیت کے عمل استعمال کی ایک ایسی مثال ہے۔

یعنی ح د معلومہ میں پرستقل ہے۔
 ۱۱۔ دباؤ کے چھوٹے اضافہ کو جو نسبت اُس کعبی (حجمی) پچک سے ہو جو اس قلیل اضافہ کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے اُس سے سیال کی پچک کی پیمائش کی جاتی ہے۔
 اگر ح حجم ہو تو خفیف کعبی پچک - $\frac{ح}{د}$ ہوگی اور پچک کا ناپ

$$- \frac{ح}{د} = \frac{ح}{د}$$

ہوگا۔ مستقل تنش پرگیس کی صورت میں ح د مستقل ہوتا ہے اور

$$\therefore \frac{ح}{د} + \frac{ح}{د} = \frac{ح}{د}$$

اس طرح پچک کا ناپ وہی ہوا جو دباؤ کا ناپ ہے۔
 اگر پچک اور دباؤ میں ربط معلوم ہو تو ہم دباؤ اور حجم میں ربط معلوم کر سکتے ہیں۔
 مثلاً اگر ہم ایک ایسے سیال کے وجود کا تصور کر سکیں جس کی پچک دباؤ کی دو چند ہو تو ہمیں ربط

$$- \frac{ح}{د} = \frac{ح}{د} = ۲$$

حاصل ہوتا ہے۔ جس سے پتہ چلتا ہے کہ ح د مستقل ہے۔

وزن کیت اور کثافت کے پیمانے

۱۲۔ سیال کے وزن کیت اور کثافت کے پیمائش اسی طرح کی جاتی ہے جیسے ٹھوس اجسام کی صورت میں۔

اگر ک کیت کے سیال کا وزن د ہو تو حسب معمول قرار د ا دوں کے مطابق جن سے ک کیت اور قوت کی اکائیاں معرض تعریف میں آتی ہیں

$$و = ک ج$$

اگر ک کیت کے سیال کی کثافت ث اور حجم ح ہو تو

$$ک = \frac{ث}{ح}$$

اور $\therefore \quad \rho = \frac{C}{V}$

معیاری چیز کے لئے $\rho = 1$ اور اس لئے کثیت کی اکائی معیاری چیز کے اکائی حجم کی کثیت ہے اگر کثیت کی اکائی پونڈ ہو تو مساوات $\rho = \frac{C}{V}$ کج سے ظاہر ہے کہ ایک پونڈ پر جاؤ بہ ارض کا عمل قوت کی ج اکائیوں کے مساوی ہے۔ اس لئے قوت کی اکائی تقریباً نصف اونس کے وزن کے مساوی ہے اور اس کو پونڈ مل کہتے ہیں۔

۱۳۔ گزشتہ دفعات میں ایسے سیالوں پر غور نہیں کیا گیا جنکی کثافت متغیر ہوتی ہے لیکن سمجھنا آسان ہے کہ مائع کی کثیت کی کثافت مسلسل طور پر نقطہ بہ نقطہ متغیر ہوتی ہے۔ اور آئندہ معلوم ہو گا کہ ایک پگڈار سیال کی کثیت جو جاؤ بہ ارض کے زیر عمل ساکن ہے اور جس کے تمام جہہ میں تپش مستقل ہے لازماً غیر متجانس ہونی چاہیئے۔ اس لئے سیال کے کسی نقطہ پر کثافت کی پیمائش اس نقطہ پر جاؤ کی یا کسی مسلسل طور پر بدلنے والی مقدار کی پیمائش کی طرح ہونی چاہیئے۔

غیر متجانس سیال کے کسی نقطہ پر کثافت کی پیمائش

فرض کرو کہ ایک نقطہ کے گھیرنے والے کچھ سیال کا حجم C ہے اور کثیت ρ نیز فرض کرو کہ ρ ایک متجانس سیال کی کثافت ہے جسکے C حجم کی کثیت ρ ہے یا جبین

$$\rho C = \text{ک}$$

تو ρC کو C حجم والے غیر متجانس سیال کے اس حصہ کی اوسط کثافت کہا جاسکتا ہے اور بالآخر جبکہ C لا انتہاکم کر دیا جائے مگر یہ ہمیشہ نقطہ کو گھیرے ہوئے ہے تو ρC کو اس نقطہ پر سیال کی کثافت کہا جاسکتا ہے۔

۱۴۔ گیس کے دبانے میں جو کام ہوتا ہے اسکو معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ d دباؤ گیس کا حجم C ہے۔ اور جس برتن میں گیس ہے اس کی سطح کا جز فرس اور سطح فرس کے اندر دار عماد کا جز d فرس ہے۔
تو چھوٹے پگڈاؤ میں جو کام کیا گیا اس کی مقدار ہے

$$= d \times \text{فرس} = d \times \text{فرس}$$

اور حجم C سے C میں دبانے کے لئے جو کام کیا گیا وہ

$$= - \text{کر دفرح} = - \text{کر م فرح} \text{ اگر } ح د = م$$

$$= م \text{ لوک } \frac{ح}{ح} = ح د \text{ لوک } \frac{ح}{ح}$$

اگر چیک برتن کے گرو کے ہوائی کرہ کے موجودگی میں وقوع پذیر ہوئی ہو مثلاً اگر ایک اسطوانہ میں فشار سے ذریعہ گیس بند کی گئی ہو تو ہوائی کرہ کا دباؤ چیک کے کام میں مدد دیتا ہے۔ اس طرح اگر کرہ ہوائی کے دباؤ ۲۱ برابہائی حجم ہو تو حجم ح میں دبائے کے لئے بیرونی کام ہو گیا اور

$$= - \text{کر } (د - ۲۱) \text{ فرح} ، \text{ جہاں } ح د = ۲۱ ح$$

$$= ۲۱ ح \text{ لوک } \frac{ح}{ح} - ۲۱ (ح - ح)$$

امثلہ

(ان مثالوں میں ج ۲ کے مساوی دیا گیا ہے جبکہ فٹ اور ثانیہ اکائیاں ہوں)

۱۔ مستطیل رقبہ ۱ ب ج د سیالی دباؤ کے زیر عمل ہے۔ ۱ ب ثابت خطہ مستقیم ہے۔ اور رقبہ پر کا دباؤ طول ب ج (لا) کا ایک دیا ہوا تفاعل (د) ہے ثابت کر د کہ ج د کے کسی نقطہ پر دباؤ $\frac{د}{ب} = ۱$ ہے جہاں ۱ = ۱ ب۔

اگر ۱ ایک ثابت نقطہ ہو اور ۱ ب ، ۱ د کی سمتیں ثابت ہوں اور اگر ۱ ب = لا اور ۱ د = ما تو ج پر دباؤ = $\frac{د}{ب}$ فرلا فرما

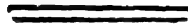
۲۔ مساوات ۱ = ج ث ح میں اگر قوت کی اکائی ۱۰۰ پونڈ وزن طول کی اکائی ۲ فٹ اور دقت کی اکائی ۱۰ ثانیہ ہو تو پانی کی کثافت معلوم کرو۔

۳۔ اگر دقت کی اکائی ایک دقیقہ طول کی اکائی ایک گز ہو اور اگر معیاری شے کے ۱۵ کعب انچ کا وزن ۲۵ اونس ہو تو قوت کی اکائی درجہ فٹ کرو۔

۴۔ مساوات ۱ = ج ث ح میں دقت کی اکائی میں ثانیوں کی تعداد طول کی اکائی میں فٹوں کی تعداد کے مساوی ہے۔ قوت کی اکائی ۵۰ پونڈ وزن ہے اور معیاری چمرے ایک کعب فٹ کا وزن ۱۳۵ اونس ہے۔ دقت کی اکائی معلوم کرو۔

- ۵۔ رفتار کی اکائی ۴ فٹ فی ثانیہ ہے پانی معیاری چیز ہے اور قوت کی اکائی ۱۲۵ پونڈ وزن ہے۔ وقت اور طول کی اکائیاں معلوم کرو۔
- ۶۔ پانی کے ایک کعب فٹ کے وزن کو تعبیر کرنے والا عدد اس کے حجم کو ظاہر کرنے والے عدد کا $\frac{1}{16}$ اور اس کی کمیت کو ظاہر کرنے والے عدد کا $\frac{1}{8}$ سے اور اس کو ایک فٹ اٹھانے میں کئے گئے کام کو ظاہر کرنے والے عدد کا $\frac{1}{16}$ ہے طول، کمیت اور وقت کی اکائیاں دریافت کرو۔
- ۷۔ اگر گرہ ہوائی کا دباؤ، دباؤ کی ایکائی، آواز کی رفتار، رفتار کی اکائی، اسراع، جاذبہ اسراع کی اکائی، ہوتو قوت کی اکائی تقریباً معلوم کرو۔
- ۸۔ اگر ۱ فٹ اور ۱ ثانیہ طول اور وقت کی اکائیاں ہوں اور پانی کی کثافت معیاری کثافت ہو تو ۱ اور ۱ میں ربط معلوم کرو کہ مساوات $W = J \times H$ سے کسی چیز کا وزن پونڈوں میں معلوم ہو سکے۔
- ۹۔ ۸ فٹ فی ثانیہ کی رفتار رفتار کی اکائی اور کرنے والے جسم کا اسراع اسراع کی اکائی اور ایک ٹن کمیت کی اکائی ہوتو پانی کی کثافت معلوم کرو۔
- ۱۰۔ کچھ مائع ایک مخروط میں جس کا محور انتصابی اور اس نیچے کی طرف سے ڈال دیا گیا ہے۔ اس مائع کے کسی نقطہ پر کثافت سطح پر کی کثافت سے بقدر ایک ایسی مقدار کے بڑی ہے جو ایسے بدلتی ہے جیسے سطح سے نقطہ کی گہرائی۔ ثابت کرو کہ جب مائع کو لانے سے اس کی کثافت یکساں ہو جائے تو یہ کثافت اصلی حالت پر اس نقطہ پر کی کثافت کے مساوی ہے جس کی گہرائی مخروط کے محور کی ایک چوتھائی کے مساوی ہو۔
- ۱۱۔ کثافت والے مائع سے بھرے ہوئے برتن میں سے مائع کا $\frac{1}{16}$ حصہ نکال دیا گیا ہے اور اس کو نہ کثافت والے مائع سے بھر دیا گیا ہے۔ اگر اس عمل کو م مرتبہ دہرایا جائے تو برتن میں کے مائع کی کثافت معلوم کرو۔
- ۱۲۔ ایک برتن کا حجم H ہے۔ اس کو کثافت والے مائع سے بھر دیا گیا ہے۔ اگر نہ کثافت والے مائع کا حجم انتہائی صغیر قطروں میں اس کے اندر ٹپک جائے تو حاصل شدہ مائع کی کثافت معلوم کرو۔
- ۱۳۔ ایک مائع کی کثافت نقطہ ب نقطہ بدلتی ہے۔ ثابت کرو کہ ایک معلوم نقطہ میں سے

گورنے والی سمتوں میں سے اُس سمت میں کثافت زیادہ سے زیادہ سرعت سے بدلتی ہے جو اس نقطہ میں سے گزرنے والی یکساں کثافت والی سطح پر عماد ہو۔ نیز اس سطح کے ماسی مستوی میں جو سمتیں ہیں ان میں سے زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم کثافت کے تغیر والی سمتیں وہ ہیں جو صدری تراشوں کے ماسوں پر منطبق ہوتی ہیں۔



باب دوم

سیالوں کے توازن کی شرطیں

۱۵۔ عام سے عام صورت میں فرض کرو کہ ایسے سیال کی کچھ کمیت جو بچک دار ہو یا بے بچک منجائس ہو یا غیر متجانس، دی ہوئی قوتوں کے زیر عمل ساکن ہے اور فرض کرو کہ توازن کی شرطیں اور کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم کرنا مطلوب ہے۔

فرض کرو کہ سیال کے کسی نقطہ n کے محدود علی القوائم محوروں کے لحاظ سے لا، مائی ہیں۔ اور q اس کے نزدیک ایک ایسا نقطہ ہے کہ n ق محور la کے متوازی ہے فرض کرو کہ $la + م$ لا، مائی نقطہ q کے محدود ہیں۔ n ق کے گرد ایک چھوٹا منشور یا اسطوانہ بناؤ جو n ق پر کی علی القوائم مستویوں سے محدود ہو۔

فرض کرو کہ اسطوانہ کی عمودی تراش کا رقبہ n نقطہ پر کا دباؤ d اور نقطہ q پر کا دباؤ $d + م$ ہے۔

اب چونکہ بہت چھوٹا ہے، اس لئے مستوی n پر کے کسی نقطہ پر دباؤ تقریباً d کے مساوی ہوگا اور اس لئے اسپر کا دباؤ

($d + م$)

ہوگا جہاں $ج$ بمقابلہ d کے صفر ہو جاتا ہے جیکہ $ع$ کو لا انتہا کم کیا جائے اس لئے کہ $ع$ کو ہم اس قدر چھوٹا فرض کر سکتے ہیں کہ بمقابلہ d کے $ج$ نظر انداز ہو سکتے۔ اور اسطوانہ کے $ن$ پر کا دباؤ $د$ کے مساوی لیا جاسکے۔ اور اسی طرح $ق$ پر کے دباؤ کو لے سکیں

($d + م$)

اگر اسطوانہ n ق کی اوسط کثافت θ ہو تو اسکی کمیت = $\theta \times م$ ہے اور

لاٹ ع مع لا سے وہ قوت تغیر ہوگی جو ن فی پرا اسکے محور کے متوازی عمل کرتی ہے
جہاں لا مع ک، ما مع ک، سے مع ک سیال کے ذرہ مع ک پر جو (لا، ما، ی)
پر واقع ہے عمل کرنیوالی قوتوں کے اجزائے تحلیل میں۔
اس لئے ن ق کے توازن کے لئے

$$(د + مع د) - د = لاٹ ع مع لا$$

$$مع د = دٹ لا مع لا$$

انتہائی سے جبکہ مع لا اور اس لئے مع د لا انتہا کم کر دئے جائیں نقطہ ن پر کی
کشاف ت ہوگی اور ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{جف د}{جف لا} = دٹ لا$$

$$\frac{جف د}{جف ما} = دٹ ما$$

$$\frac{جف د}{جف ی} = دٹ ی$$

$$لیکن فرد = \frac{جف د}{جف لا} فرلا + \frac{جف د}{جف ما} فرما + \frac{جف د}{جف ی} فری$$

$$\therefore فرد = دٹ (لا فرلا + ما فرما + ی فری) \dots\dots\dots (ص)$$

اس مساوات سے دباؤ معلوم ہو جاتا ہے۔

۱۶۔ صرکھا دباؤ متغیروں لا، ما، ی کا تفاعل ہے۔ اور ہم جانتے ہیں کہ

لے ثروت بلا میں ع اس قدر چھوٹا لیا گیا ہے کہ اس کے خطی ابعاد بمقابلہ مع لا کے نظر انداز کئے جاسکیں
یعنی لا کی تبدیلی مع لا کے حواس میں دباؤ میں جو تبدیلی واقع ہوتی ہے اس پر ما، ی کے اس
بدلنے سے اثر نہیں پڑتا۔

$$\frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما جف}^{\text{ا}} \text{ی}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی جف}^{\text{ا}} \text{ما}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی جف}^{\text{ا}} \text{لا}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما جف}^{\text{ا}} \text{لا}}$$

اس لئے گزشتہ مساواتوں سے ہمیں مندرجہ ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$(ب) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}} = (\text{ث مے}) \\ \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{لا}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{لا}} = (\text{ث لا}) \\ \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{لا}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما}} = (\text{ث ما}) \end{array} \right.$$

جن سے

$$\text{مے} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ث}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما}} - \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ث}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}} = \text{ث} \left(\frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}} - \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما}} \right)$$

$$\text{لا} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ث}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}} - \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ث}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{لا}} = \text{ث} \left(\frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{لا}} - \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{لا}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}} \right)$$

$$\text{ما} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ث}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{لا}} - \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ث}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما}} = \text{ث} \left(\frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{لا}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما}} - \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{لا}} \right)$$

لا، ما، مے سے ضرب دیکر جمع کرنے سے

$$\text{لا} \left(\frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}} - \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما}} \right) + \text{ما} \left(\frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{لا}} - \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{لا}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}} \right) + \text{مے} \left(\frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{لا}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما}} - \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{لا}} \right) = 0$$

$$(ج) \quad \dots \dots \dots = 0$$

جو توازن کے لئے ضروری شرط ہے۔

اس مساوات کی ہندی تعبیر یہ ہے کہ قوت کے خطوط

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ما}} = \frac{\text{فری}}{\text{ے}}$$

سطحوں کے ایک نظام سے علی التوا تم قطع ہو سکتے ہیں۔

۱۷۔ تیزانیات - اگر سیال متجانس اور بے پچک ہو تو لا + فرلا + ما + فرما + ے + فری

(۱۱۲)

پورا فرقہ ہونا چاہیئے تاکہ توازن ممکن ہو سکے۔
 باغاط دیگر قوتوں کا نظام محفوظ یا بقائی ہونا چاہیئے اور قوتوں کی تسبیح فرقہ تفاعل کے
 مکانی تغیرات سے ہونی چاہیئے۔

اگر وہ قوت تفاعل ہو تو

فرد = - ث + فر

اس لئے $\frac{\text{ف}}{\text{ث}} + \text{ف} = \text{م}$ (مستقل)

مثلاً اگر قوتیں ثابت مرکزوں کی طرف یا ان کے باہر وار عمل کر نیوالی ہوں اور وہ ان مرکزوں کے
 فاصلوں کی تفاعل ہوں تو

$$\left\{ \frac{\text{ف}}{\text{ر}} \right\} = \text{ما} = \left\{ \frac{\text{لا}}{\text{ر}} \right\} \quad \left\{ \frac{\text{ف}}{\text{ر}} \right\} = \text{ے} = \left\{ \frac{\text{ی}}{\text{ر}} \right\}$$

جہاں (ا، ب، ج) اس مرکز کے محدود ہیں جہاں قوت ف (ر) مائل ہے۔

اب $\text{ر} = (\text{لا} - \text{ا}) + (\text{ما} - \text{ب}) + (\text{ی} - \text{ج})$

لا + فرلا + ما + فرما + ے + فری = ث + فر

اور فرد = ث + فر

اس صورت میں چونکہ

$$\left\{ \frac{\text{ف}}{\text{ر}} \right\} = \text{ما} = \left\{ \frac{\text{لا}}{\text{ر}} \right\} \times \frac{\text{ب}}{\text{ر}} - \left\{ \frac{\text{ف}}{\text{ر}} \right\} \times \frac{\text{ا}}{\text{ر}} \times \frac{\text{ب}}{\text{ر}}$$

$$\left\{ \frac{\text{ف}}{\text{ر}} \right\} = \text{ے} = \left\{ \frac{\text{ی}}{\text{ر}} \right\} \times \frac{\text{ب}}{\text{ر}} - \left\{ \frac{\text{ف}}{\text{ر}} \right\} \times \frac{\text{ا}}{\text{ر}} \times \frac{\text{ب}}{\text{ر}}$$

اس لئے یہ ظاہر ہے کہ مساوات (ب) ہمیشہ پوری ہوتی ہے لیکن اس سے نتیجہ نہیں نکالنا چاہیئے کہ اس طرح کی قوتوں کے زیر عمل غیر متجانس سیال کا توازن بھی ہمیشہ ممکن ہوتا ہے۔ جب کثافت مستقل ہو تو (ب) مساواتیں ہو جاتی ہیں

$$\frac{\text{جفے}}{\text{جف م}} = \frac{\text{جف م}}{\text{جف ی}} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ی}} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف م}} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف م}}$$

اور اسی لئے اس صورت میں ہمیشہ پوری ہوتی ہیں اس لئے اس قسم کی قوتوں کے زیر عمل ایک متجانس سیال کا توازن ہمیشہ ممکن ہے۔

۱۸۔ غیر متجانس سیال ساگر قانون کثافت معلوم ہو یعنی ت اگر لا، م، ی کا دیا ہو تفاعل ہو تو (ب) مساواتیں وہ شرطیں ہیں جن کا پورا ہونا ضروری ہے کہ دی ہوئی قوتیں لا، م، ی سیال کو توازن میں رکھ سکیں۔

۱۹۔ لچکدار سیال :- اگر سیال لچکدار ہو تو ایک اور شرط کا اضافہ ہو جاتا ہے کیونکہ

$$\frac{1}{\rho} = \frac{f}{\rho} \quad (د) \quad (لا + ف + م + ی)$$

اگر قوتیں توہ ذ سے حاصل ہو سکیں یعنی اگر

$$لا + ف + م + ی = 0$$

پورا فرقہ (- فرقہ) ہو تو

$$م = \frac{f}{\rho} = - فرقہ$$

$$\therefore \text{م لوک} = \frac{f}{\rho} = - فرقہ \quad \text{جہاں ج مستقل ہے۔}$$

$$\text{یعنی } د = ج \text{ تو } ف + م = \frac{ج}{\rho} \text{ تو } ف$$

جب قوتیں ثابت مرکوزوں کی طرف مائل ہوں اور فاصلوں کے تفاعل ہوں (دفعہ ۱۷) تو یہ مساوات یہ شکل

$$م \frac{ف}{د} = ح ذ (ر) فر$$

اعتیار کرتی ہے اور دکاتین ہو سکتا ہے۔
اگر قش متغیر ہو تو دباؤ قش اور کثافت میں یہ ربط

د = م ث (۱ + ع ت)
ہوتا ہے جہاں قش ت م قش پیاسے ناپی گئی ہے اور ع = ۳۶۵ ۰۰ ۵
اس سے میں حاصل ہوگا

$$د = م ث ع \left\{ \frac{۱}{د} + ت \right\} = ح ر ث ت$$

جہاں ح = م ع ، اور ت = $\frac{۱}{د} + ت$ ، ت کو قش مطلق کہتے ہیں
جس کا صفر ۰۲۰۳ مٹی پڑتا ہے۔

$$اس صورت میں \frac{لا فلا + ما فرما + ع فری}{ح ر ت} = \frac{ف}{د}$$

اور اس لئے ت تفاعل ہونا چاہیے لا، ما، ہی کا۔
ان میں سے کسی صورت میں اگر کسی خاص نقطہ پر کا دباؤ دیا جائے تو مستقل دریافت
ہو سکتا ہے۔

پچکارسیالوں کی صورت میں اگر سیال کی کیفیت اور وہ جگہ جس میں بمحدود ہے معلوم ہوں
تو مستقل معلوم ہو جاتا ہے۔

۲۰۔ د دریافت کرنے کی مسادات طریقہ ذیل سے بھی حاصل ہو سکتی ہے۔
فرض کرو کہ ن ق ایک بہت چھوٹے اسطوانہ کا محور ہے جو ن ق پر کے علی التعمیم
مستویوں سے گھرا ہوا ہے۔

فرض کرو کہ دائرہ د + مع د نقاط ن اور ق پر کے دباؤ ہیں۔ سطحی تراش
کا بقیہ ہے اور مع سم، ن ق کا طول ہے اب اگر سمت ن ق میں ذرہ د ک
پر عمل کرنیوالی قوتوں کا جزو تحلیل میں مع ک ہو تو

$$(د + مع د) - د = ث + ع س مع س$$

اور اس لئے انتہا لینے سے

$$فرد = ث س فرس$$

یعنی کسی سمت میں دباؤ کے اضافہ کی شرح دو مقداروں کا حاصل ضرب ہے۔ ایک مقدار کثافت ہے اور دوسری مقدار قوت کا وہ جزو تخیلی ہے جو اس سمت میں عمل کرتا ہے۔ اگر نقطہ ن کے محدود لا، ما، ی اور س کے اجزائے تخیلی محوروں کی سمت ہیں لا، ما، ی ہوں تو

$$س = لا \frac{فرس}{دس} + ما \frac{فرس}{دس} + ی \frac{فرس}{دس}$$

اور \therefore فرد = ث (لا فرلا + ما فرما + ی فری) بوجہ دفعہ ۱۵
اگر نقطہ ن کا مقام اسطوانی محدودوں ر، ط، ی کے لحاظ سے دیا جائے اور اگر قوت س کے اجزائے تخیلی ر، ط، ی کی سمتوں میں ق، ت، ی ہوں تو

$$س = ق \frac{فرس}{دس} + ت \frac{دفرط}{دس} + ی \frac{دفری}{دس}$$

اور د کی مساوات ہو جاتی ہے

$$فرد = ث (ق فر + ت ر فرط + ی فری)$$

پھر اگر ن کا مقام قطبی محدودوں (ر، ط، اند) کے لحاظ سے دیا جائے اور قوت کے اجزاء تخیلی سر، ن، ت ہوں جو علی الترتیب ر کی سمت میں زاویہ ط والے سمتوں کے عمود کی سمت میں اور اس سمتوں میں ر پر کے عمود کی سمت میں تحلیل کئے گئے ہیں تو معلوم ہوگا کہ

$$\frac{فرد}{د} = سر فر + ن ر جب ط فرد + ت ر فرط$$

اسی طرح فرد کے لئے جگہ کسی اور محدودوں کے نظام میں معلوم ہو سکتا ہے۔
۲۱۔ مساوی دباؤ کی سطحیں۔ تمام صورتوں میں جن میں کہ سیال کا توازن ممکن ہو سکے
سے حاصل ہوگا

$$د = ف (لا، ما، ی)$$

اگر د مستقل ہو تو $ف (لا، ما، ی) = د$ (۱)

جو ایسی سطح کی مساوات ہے جس کے تمام نقطوں پر دباؤ مستقل ہے اور جس میں د کو مختلف قیمتیں دینے سے مساوی دباؤ کی سطحوں کا ایک سلسلہ ملتا ہے۔ نیز د کو سیال کے بیرونی دباؤ کے مساوی رکھنے سے بیرونی سطح یا آزاد سطح حاصل ہوتی ہے۔

اگر بیرونی دباؤ صفر ہو تو آزاد سطح ہوگی

$ف (لا، ما، ی) = ۰$

مقادیر

$$\frac{\text{جف د}}{\text{جف لا}} , \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ا}} , \frac{\text{جف د}}{\text{جف ی}}$$

جو سطح (۱) کے نقطہ (لا، ما، ی) پر کے عماد کی سمتی جیوب التمام کے تناسب ہیں با ترتیب

$$\frac{\text{جف د}}{\text{جف لا}} , \frac{\text{جف د}}{\text{جف ا}} , \frac{\text{جف د}}{\text{جف ی}}$$

کے مساوی ہیں یعنی $ث لا، ث ما، ث ی$ کے مساوی ہیں اور اس لئے $لا، ما، ی$ ہے کے متناسب ہیں۔

اس لئے کسی نقطہ پر کی حاصل قوت اس عماد کی سمت میں عمل کرتی ہے جو اس نقطہ میں سے گزرنے والی مساوی دباؤ کی سطح پر اس نقطہ میں سے کھینچا گیا ہے۔

اس لئے مساوی دباؤ کی سطحیں وہ ہیں جو قوت کے خطوط کو علی التوائم قطع کرتی ہیں۔

اس نتیجہ سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ توازن کے لئے ضروری شرائط ایسی سطحوں کے نظام کا

وجود ہے جو خطوط قوت کو علی التوائم قطع کرتی ہیں۔ یہ نتیجہ ذمہ (۱۶) کی مساوات (جہ سے

بھی حاصل ہو سکتا ہے کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ اس قسم کے نظام کے وجود کے لئے مساوات

ذکورہ ضروری تحلیلی شرط ہے۔

۲۲۔ اگر سیال متجانس بالغ ہو یعنی اگر $ث$ مستقل ہو تو $لا، فر لا + ما فر ما + ی فر ی$ پورا

تفرق ہونا چاہیے۔ یا بالفاظ دیگر قوتوں کا نظام مقنطی با بقائی ہونا چاہیے۔

عام صورت میں اگر قوتوں کا نظام بقائی ہو تو $ث$ کو لازماً قوت $د$ کا تفاعل ہونا چاہیے

کیونکہ $فرد = ث$ فرقہ اور فرد پورا فرقہ ہے۔ اسلئے $ث$ کو قوہ ذ کا تفاعل ہونا چاہیئے۔ اس طرح ذ اور اس لئے $ث$ د کے تفاعل ہیں اور مساوی دباؤ کی سطحیں مساوی قوہ کی سطحیں بھی ہیں اور مساوی کثافت کی سطحیں بھی۔
اگر سیال یکساں ہو اور ہمیشہ متغیر قوہ

$$\frac{فرد}{د} = ث$$

اس طرح، اسی قسم کے عمل استدلال سے، $ث$ د کا تفاعل ہے اور مساوی دباؤ کی سطحیں مساوی تپش کی سطحیں بھی ہیں۔
لیکن اگر $لا$ فلا + ما فرما + مے فری پورا فرقہ ہو تو یہ سطحیں عام طور پر منطبق نہیں ہوتیں۔
فرض کرو کہ سیال غیر متجانس اور بے پچک ہے تو مساوی دباؤ کی اور مساوی کثافت کی سطحیں حسب ذیل مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں

۱۶) یہ نتیجے طرہ ذیل سے بھی مستط ہو سکتے ہیں۔

قریب کی دو مساوی دباؤ کی سطحوں پر غور کرو۔ جن کے درمیان سیال کی ایک تہ ہے اور فرض کرو کہ ایک سطح کے نقطہ ن کے گرا ایک جھوٹا اترہ بنایا گیا ہے اور اس کے محیط میں سے گزرنے والے عمادوں سے سیال کا کچھ حصہ علیحدہ کر لیا گیا ہے۔ سیال کا یہ حصہ قوت عاملان کے سروں اور محیط پر کے دباؤ کے زیر عمل ساکن ہے اب جو کہ تقریباً یہ بہت جھوٹا اسطوانہ ہے اور اس کے محیط پر کے تمام نقطوں پر دباؤ مساوی ہے۔ اس لئے دونوں رحوں پر کے دباؤں کا فرق قوت عاملہ کی وجہ سے پیدا ہونا چاہیئے جو اس لئے اُس سمت میں عمل کرتی ہے جس سمت میں کہ یہ دباؤ عمل کرتے ہیں یعنی نغطوں پر کے عماد کی سمت میں۔

اگر تین ایک قوہ سے حاصل ہو سکیں تو حاصل قوت ہم قوہ سطحوں کے علی التوا اُٹھ ہوگی اور اس لئے مساوی دباؤ کی سطحیں ہم قوہ سطحوں پر منطبق ہوگی۔

پھر اس معصری اسطوانہ کے قوت وزن پر غور کرنے سے عمل کریموالی توت لی کا کی کیت۔
اور چونکہ اس منصرف کی کیت بالراست اس فاصلہ کے متناسب ہے اس لئے کثافت مستقل ہونی چاہیئے یہی مساوی دباؤ کی سطحیں مساوی کثافت کی سطحیں بھی ہوتی ہیں۔

فرد = . ، فرٹ = .

یعنی لا فرلا + ما فرما + عے فری = .

جفٹ لا + جفٹ فرلا + جفٹ فرما + جفٹ فری = (ب)

اس لئے یہ ایسی سطحوں کی تفرقی مساواتیں ہیں جو اپنے باہمی تقاطع سے مساوی دباؤ اور مساوی کثافت کے مائعوں کا تعین کرتی ہیں۔

(ب) سے ہمیں ماہل ہوگا

$$\frac{\text{فری}}{\text{جفٹ لا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{جفٹ فرلا}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{جفٹ فرما}}$$

..... (ج)

لیکن شرط توازن سے

$$\frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ فرلا}} + \frac{\text{جفٹ فرما}}{\text{جفٹ فرلا}} = \frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ فرما}} + \frac{\text{جفٹ فرما}}{\text{جفٹ فرلا}}$$

$$\frac{\text{جفٹ فرما}}{\text{جفٹ فری}} + \frac{\text{جفٹ فرلا}}{\text{جفٹ فری}} = \frac{\text{جفٹ فرما}}{\text{جفٹ فری}} + \frac{\text{جفٹ فرلا}}{\text{جفٹ فری}}$$

$$\frac{\text{جفٹ فری}}{\text{جفٹ فرلا}} + \frac{\text{جفٹ فرما}}{\text{جفٹ فرلا}} = \frac{\text{جفٹ فری}}{\text{جفٹ فرلا}} + \frac{\text{جفٹ فرما}}{\text{جفٹ فرلا}}$$

اور اس لئے مساواتیں (ج) ہو جاتی ہیں

$$\frac{\text{فری}}{\text{جفٹ لا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{جفٹ فرلا}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{جفٹ فرما}}$$

... (د)

جو مساوی دباؤ اور مساوی کثافت کے مائعوں کی تفرقی مساواتیں ہیں۔

۲۳ — اب ہم ایک محدود کمیت کے سیال کے توازن پر غور کرنے سے یہ بتائیں گے کہ

کس طرح دباؤ کی اساسی مساوات حاصل کی جاتی ہے۔
فرض کر دو کہ سیال میں ایک بند سطح سے ٹھیکھی گئی ہے۔ اور اس کے کسی نقطہ پر بیرونی عماد کے سق جیوب التمام M ، N ہیں۔ سطح AB کے اندر جو سیال ہے اس کی کیت کے توازن کی شرطوں کو انحصاراً یوں بیان کر سکتے ہیں کہ حد و پر کے عماد ہی دباؤ کیت پر عمل کرنیوالی قوتوں کا توازن کرتے ہیں۔ اس طرح محور کے متوازی تحلیل کرنے سے ہمیں شکل ذیل کی تین مساواتیں ملتی ہیں۔

کمال دفرس = کلا کث لا فزا فزافری (۱)

اور محروموں کے گرو معیار لینے سے ہمیں شکل ذیل کی مزید تین مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

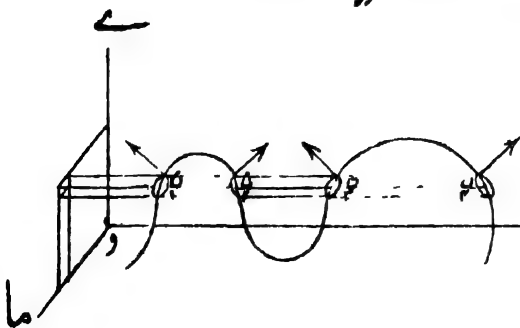
اگر د (ن۔ م ی) فرس = اگر کث (اے۔ ی ما) فرلا فرما فری (۲)

جہاں دوہرے مکمل کل سطح س پر اور تہرے مکمل کل بند فضا میں لئے گئے ہیں۔

اب محکمہ ازلہ جنت د فرما فری پر غور کہ جسکے حدود محکم وہی ہیں۔ محمولا کے متوازی

ایک پتلا مندر جو بلا زنا سطح کو جنت مرتبہ قطع کرے گا۔ فرض کر دو کہ مندر نقاط ن، ن، ن، پر سطح کے اجزا فرض، فرض، فرض، قطع کرتا ہے اس مندر کے ساتھ ساتھ مکمل کرنے سے ہمیں محل ہوگا۔

$$\frac{\text{حجۃ الہ}}{\text{حجۃ الہ}} = \text{فراموشی} = \text{فراموشی} \dots\dots\dots (۳)$$



لیج جاتی تھیں حدود
نہ، تا نہ
اور نہ تا
نہ، وغیرہ
کے درمیان
لب گیا
۷۔

ہم نے شکل (۲) کی معیاروں والی مساواتوں کو ابھی تک استعمال نہیں کیا لیکن ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ وہ بھی مساواتوں (۵) سے پوری ہوتی ہیں۔ مثلاً

$$\frac{J}{J} = \frac{J}{J} \quad \text{فر لا فر ما فری}$$

پر غور کرو اگر ہم اسی منشور پر پہلے کی طرح مکمل کریں اور اس کا خیال رکھیں کہ منشور پر مستقل ہے تو ہمیں حدود ۱، ۲ اور ۳، ۴ اور ۵ وغیرہ کے درمیان تکمیل کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{J}{J} = \frac{J}{J} \quad \text{فر لا فر ما فری}$$

اور اوپر کی طرح یہ $\frac{J}{J}$ ما فرس کے مساوی ہے جس میں پوری سطح پر تکمیل لیا گیا ہے۔ یعنی مساوات (۴) اس حالت میں بھی درست رہتی ہے جبکہ ہم تکمیل میں (۱ یا ۲) جزو ضربی کے طور پر مساوات کی طرف میں شامل کر دیں۔ اسی طرح کے استدلال سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{J}{J} = \frac{J}{J} = \frac{J}{J} \quad \text{فر لا فر ما فری}$$

اور مساوات (۵) سے اندراج کرنے سے یہ ہوتا ہے

$$\frac{J}{J} = \frac{J}{J} \quad \text{فر لا فر ما فری}$$

اس طرح (۲) کی تصدیق ہوتی ہے۔

یہ یاد رہے کہ چونکہ سیال کامل فرضی یا جذبی زور کی مزاحمت کے ناقابل ہونا ہے اس لئے اس قسم کے روز متوازن سیال کی کیفیت کے اندر نہیں پائے جاسکتے۔ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ محوروں کے گرمیابارے سے جو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں وہ لازماً پوری ہونی چاہئیں جسکے محوروں کے متوازی قوتوں کو تسلیل کرنے سے حاصل شدہ مساواتیں پوری ہوں۔ کیونکہ توازن کی صورت میں سوخا لڈر مساواتیں سیال کے کسی محدود یا صغیر حصے کے لئے درست ہوتی ہیں اور قوتوں کے اسی توازن سے لازم آتا ہے کہ معیاروں کی مساواتیں بھی درست ہوں۔

۲۴۔ سیال کے کردی عنصر کے توازن پر غور کرنے سے ہم یہ بھی ثابت کر سکتے ہیں کہ

ث (لا فر لا + ما فر ما + مے فری) کو برا تقرقہ ہونا چاہیے۔

$$\text{لا} = \text{ما} \cdot \text{ے} \cdot \text{ج}$$

اور دفعہ (۱۵) کی مساوات (ع) ہو جاتی ہے

$$\text{فرد} = \text{ج} \cdot \text{ث} \cdot \text{فری}$$

جسکو ایک انتصابی چھوٹے اسطوانے کے توازن پر غور کرنے سے جی بلا واسطہ حاصل کر سکتے ہیں۔

متجانس سیال کی صورت میں

$$\text{د} = \text{ج} \cdot \text{ث} \cdot \text{ی} + \text{ہر}$$

اور مساوی دباؤ کی سطحیں افقی مستوی ہیں۔

اس لئے آزاد سطح افقی مستوی ہے اور اس لئے مبداء کو آزاد سطح میں اور n کو بیرونی دباؤ قرار دینے سے

$$\text{د} = \text{ج} \cdot \text{ث} \cdot \text{ی} + n$$

اگر آزاد سطح پر کوئی دباؤ نہ ہو تو

$$\text{د} = \text{ج} \cdot \text{ث} \cdot \text{ی}$$

یعنی کسی نقطہ پر دباؤ آزاد سطح کے نیچے اس نقطہ کی گہرائی کے متناسب ہوگا۔

غیر متجانس سیال کی صورت میں مساوات

$$\text{فرد} = \text{ج} \cdot \text{ث} \cdot \text{فری}$$

سے ظاہر ہے کہ ث کو ی کا تفاعل ہونا چاہیے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک ہی افقی سطح کے تمام نقطوں پر کثافت اور دباؤ مستقل ہوتے ہیں۔

مثال کے طور پر فرض کرو کہ $\text{ث} \propto \text{ی}^n = \text{م} \cdot \text{ی}^n$

$$\text{تو} \quad \text{د} = \text{ج} \cdot \text{م} \cdot \frac{\text{ی}^{n+1}}{1+n} + n$$

۲۶۔ دو مائع جو باہم آمیز نہیں ہوتے ایک خمدار مٹی میں ڈالے گئے میں ثابت کرو کہ انکی مشترک سطح سے آزاد سطحوں کے ارتفاع کثافتوں کے بالعکس متناسب ہوتے ہیں۔

مشترک سطح پر دباؤ وہی ہیں اور اگر مشترک سطح سے آزاد سطحوں کے ارتفاع ی ، $\text{ی}'$ ہوں اور کثافت کی کثافتیں ث ، $\text{ث}'$ ہوں تو یہ دباؤ علی الترتیب

$$n \text{ ج } \text{ٹ} \text{ ی} + n \text{ ج } \text{ٹ} \text{ ی}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y}{x}$$

ہونگے اس لئے

۲۷۔ یہ ایک مشہور قانون ہے کہ اگر جاذبہ ارض اور چکنی سطحوں کے دباؤ کے زیر عمل کوئی نظام متوازن ہو تو توازن قائم ہوتا ہے بشرطیکہ مرکز ثقل نیچے سے نیچے مکن مقام میں واقع ہو۔ جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ غیر متجانس مائع کی صورت میں گہرائی کے ساتھ کثافت کو بڑھنا چاہیئے کیونکہ یہ صورت دیگر توازن غیر قائم ہوگا۔

اس طرح اگر ایک غیر متجانس مائع کو ایک برتن سے دوسرے برتن میں ڈالا جائے تو سب سے وزنی تہ نیچے بیٹھ جائے گی اور قانون کثافت یقیناً بدلتا ہوگا۔

مائع کی کچھ مقدار جس کی کثافت گہرائی کا ایک دیا ہوا تفاعل ہے دئے ہوئے برتن میں ہے۔ اگر اس مائع کو دوسرے برتن میں منتقل کیا جائے تو نئے قانون کثافت کا معلوم کرنا مطلوب ہے۔ جب کہ ہر برتن ایک گردش سطح کی شکل میں ہو جس کا محور اتصالی ہے۔

لا کو آف کے زیر ترین نقطہ سے اوپر کی طرف ناپ کر فرض کرو کہ $ma = f(لا)$ پہلے برتن کا کوئی بھی مائع ہے اور $ma = f(لا)$ دوسرے برتن کا۔

پس اگر پہلے برتن میں لامبندی والی تہ دوسرے برتن میں لامبندی والی تہ کے متناظر ہو تو چونکہ حجم مساوی ہیں اسلئے ہیں حاصل ہوگا

$$f(لا) = f(لا) = f(لا) = f(لا)$$

اب عمل تکمیل سے لا کو لا کی رقوم میں حاصل کر سکتے ہیں۔ اور اسلئے $f(لا)$ جو لا کا تفاعل ہے، لا کا نیا تفاعل بن جاتا ہے۔

نیز اگر ان دو برتنوں میں مائع کی گہرائیاں گ۔ گ۔ ہوں تو گ کو گ کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں اور اس لئے کثافت $f(لا)$ گ۔ گ۔ لا کی رقوم میں معلوم ہو سکتی ہے اگر نیا قانون کثافت دیا جائے اور نئے برتن کی شکل معلوم کرنا مطلوب ہو تو ہم اس طرح عمل کرتے ہیں۔

کناف چونکہ (گ - لا) کا اور نیز (گ - لا) کا یا ہوا تفاعل ہے ہم ان دونوں جملوں کو مساوی رکھ کر لا کو لا کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں -
 نیز متنناظر تہوں کے جھوں کو مساوی رکھنے سے ہم ما فر لا = ما فر لا حاصل کرتے ہیں جس میں لا کی قیمت لا کی رقوم میں مندرج کر کے ہم مطلوبہ مساوات معلوم کر لیتے ہیں - اور پھر پورے جھوں کو ایک دوسرے کے مساوی رکھ کر گ کی قیمت معلوم کرتے ہیں -
 مثال ۱ - ایک اسطوانی برتن میں مائع کی کناف ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کا قانون کناف معلوم کرہ اگر مائع کو ایک مخروطی برتن میں ڈالا جائے جس کا راس نیچے کی طرف ہو -
 اس صورت میں

$$\text{ث} = \text{مہ} (\text{گ} - \text{لا})$$

$$\text{اور } ۴ \text{ لا} = \frac{۱}{۳} \text{ مہ لا مس مہ}$$

$$\text{نیز } ۴ \text{ لا گ} = \frac{۱}{۳} \text{ مہ گ مس مہ}$$

$$\therefore \text{ث} = \text{مہ مس مہ گ} - \frac{۱}{۳} \text{ لا} = \frac{\text{مہ مس مہ}}{۳} (\text{مہ گ مہ} - \text{مہ گ مہ} + \text{مہ})$$

اگر گہرائی می ہو -

مثال ۲ - مائع کی کچھ مقدار جس کی کناف ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی ایک اونڈے یا اٹے مکانی نما میں دی ہوئی بلند می پک بہری ہوئی ہے ایک ایسے برتن کی شکل معلوم کرنا ہے (جو گردش سطح کی شکل میں ہو) کہ اگر اس مائع کو اس میں ڈالا جائے تو کناف ایسے بدلے جیسے گہرائی کا مربع -

اس صورت میں ث = مہ ف - لا = مہ ف - لا جہاں ف گہرائیاں ہیں -

$$\therefore \text{لا} = \text{ف} - \frac{۱}{۳} (\text{ف} - \text{لا}) \quad \text{اگر مہ} = \text{مہ ج}$$

$$\text{مساوات } ۴ \text{ لا فر لا} = \text{ما فر لا سے}$$

$$\text{ج ما} = ۸ (\text{ف} - \text{لا}) \{ \text{ف ج} - (\text{ف} - \text{لا}) \}$$

حاصل ہوتا ہے -

حل کو پورا کرنے کے لئے پورے حجموں کو مساوی رکھنا چاہیے جس سے $ج ف^2 = ج ف$ حاصل ہوتا ہے جو $ف$ اور $ج$ میں مطلوبہ ربط ہے۔

۲۸ — جاؤہ ارض کے زیر عمل لچکدار سیال کا سکون۔

اس صورت میں $د = م = ث$

$$\text{اور } \frac{ف}{د} = \frac{ج}{م} \text{ فری}$$

$$\text{لوک } \frac{د}{ج} = \frac{م}{ی} \text{ اور } د = ج \text{ قوم}$$

یہاں بھی مساوی دباؤ کی سطحیں افقی مستوی ہیں اور مستقل $ج$ کا تعین $ی$ کی کسی دی ہوئی قیمت کے لئے دباؤ کے لئے دباؤ کے معلوم ہونے سے ہو سکتا ہے۔ یا اس صورت سے متعلق کسی دے ہوئے واقعہ کے معلوم ہونے سے۔

مثال :- ایک بند اسطوانہ میں جسکا محور انتصابی ہے ہوا کی دی ہوئی کیت ہے۔ اسطوانہ کے سرے سے $ی$ کو اپنے سے

(۲۲)

$$ث = \frac{د}{م} = \frac{ج}{م} \frac{ی}{قوم}$$

یہ اگر $ی$ کی دی ہوئی کیت، $د$ نصف قطر، $ف$ اسطوانہ کا ارتفاع ہو تو

$$ک = ث ر = م افری = م ا و ج (قوم - ۱)$$

جس سے $ج$ معلوم ہو جاتا ہے۔

۲۹ — مساوات عامہ کے استعمال کی مثالیں۔

(۱) فرض کرو کہ مائع کا دیا ہوا حجم $ح$ محوروں کے متوازی قوتوں

$$- \frac{م لا}{ا} - \frac{م با}{ب} - \frac{م ی}{ج}$$

کے زیر عمل ساکن ہے تو

$$\text{فرد} = \text{ث} - \left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}} \text{فرلا} - \frac{\text{ب}}{\text{ا}} \text{فربا} - \frac{\text{ی}}{\text{ج}} \text{فری} \right)$$

$$\text{اور } \text{د} = \text{م} - \frac{\text{ث}}{۲} \left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ب}}{\text{ا}} + \frac{\text{ی}}{\text{ج}} \right)$$

اس لئے مساوی دباؤ کی سطحیں متشابہ ناقص بنائیں اور آزاد سطح کی مساوات جبکہ بیرونی دباؤ موجود نہ ہو

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ب}}{\text{ا}} + \frac{\text{ی}}{\text{ج}} = \frac{\text{م}}{\text{ث}} \quad \text{ہے۔}$$

اب جس شرط سے مستقل معلوم ہوتا ہے وہ یہ ہے کہ مانع کا حجم دیا گیا ہے اور

$$\text{ح} = \frac{\text{م}}{۳} \pi \text{ ا ب ج} \left(\frac{\text{م}}{\text{ث}} \right)^{\frac{۲}{۳}}$$

$$\text{اس لئے } \text{م} = \frac{\text{ث}}{۲} \left(\frac{\text{ح}^{\frac{۳}{۲}}}{\pi \text{ ا ب ج}} \right)^{\frac{۲}{۳}}$$

(۲) ایک ثابت مستوی پر مانع کا دیا ہوا حجم ایک ایسی قوت کے زیر عمل ساکن ہے جو مستوی کے ایک ثابت نقطہ کی طرف عمل کرتی ہے اور ایسے بدلتی ہے جیسے اس نقطہ سے فاصلہ۔

ثابت نقطہ کو مبدأ قرار دیکر کسی نقطہ پر دباؤ معلوم کرنے کے لئے جملہ

$$\text{د} = \text{م} - \frac{\text{ث}}{۲} \left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ب}}{\text{ا}} + \frac{\text{ی}}{\text{ج}} \right) = \text{م} - \frac{\text{ث}}{۲} \text{ ا ب ج} \left(\frac{\text{م}}{\text{ث}} \right)^{\frac{۲}{۳}}$$

جہاں ر مبدأ سے فاصلہ ہے۔ اور اگر $\frac{\text{م}}{۳} \pi \text{ ا ب ج}$ دیا ہوا حجم ہو تو آزاد سطح نصف قطر لا والا نصف کرہ ہے۔ اور

$$\text{د} = \frac{\text{ث}}{۲} \left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ب}}{\text{ا}} \right)$$

مستوی کا وہ حصہ جسکو مانع مس کرتا ہے ایک دائرہ ہے جس نصف قطر اس ہے اور اس لئے

$$\text{اس پر کا دباؤ} = \frac{\pi r^2}{2} \left(\frac{\text{ث}}{\text{ا}} - \frac{\text{ب}}{\text{ا}} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \text{ م} \text{ ث} \left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ب}}{\text{ا}} \right)$$

(۲۳)

اس نتیجہ کو $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{4}$ ٹ ۲ کی شکل میں رکھا جاسکتا ہے۔ یہ جملہ ایسی کشش کو ظاہر کرتا ہے جو مانع کی کل کمیت پر جبکہ وہ مرکز ثقل پر ایک مادی ذرہ میں کنٹین ہو جائے عمل کرتی ہے اور درحقیقت یہ جملہ یہ فرض کر کے بھی فوراً حاصل کیا جاسکتا ہے کہ یہ مانع قوت کے مرکز پر کی کشش اور بستوی کے تعامل کی وجہ سے ساکن ہے

(۳) ایک وزن دار مانع کا دیا ہوا حجم ایسی قوت کے زیر عمل ساکن ہے جو ایک ثابت نقطہ کی طرف عمل کرتی ہے اور ایسے بدلتی ہے جیسے اس نقطہ سے فاصلہ۔

ثابت نقطہ کو مبدأ قرار دو اور ی کو امتصائی سمت میں نیچے کی طرف نا پو۔ تو

$$\Delta = -\text{مہ لا} \text{ ما} = -\text{مہ ما} \text{ اے} = \text{ج} - \text{مہ ی}$$

$$\therefore \text{فرد} = \text{ٹ} - \{\text{مہ لا فلا} - \text{مہ ما فرما} + (\text{ج} - \text{مہ ی}) \text{ فری} \}$$

$$\text{اور } \frac{\Delta}{\text{ٹ}} = \text{مہ} - \text{مہ لا} + \frac{\text{ما} + \text{اے} + \text{ی}}{۲} + \text{ج ی}$$

مساوی دباؤ کی سطحیں کرے ہیں۔ اور آزاد سطح بیرونی دباؤ کو صفر فرض کر کے مساوات

$$\text{لا} + \text{ما} + \text{اے} - \text{ی} = \frac{\text{ج ی}}{\text{مہ}} = \frac{\text{مہ}}{\text{مہ}}$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

$$\text{اس کرہ کا حجم ہے } \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\text{ج ی}}{\text{مہ}} + \frac{\text{مہ}}{\text{مہ}} \right) = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\text{ج ی}}{\text{مہ}} + \frac{\text{مہ}}{\text{مہ}} \right)$$

اس کو دئے ہوئے حجم کے مساوی رکھنے سے مستقل مہ معلوم ہو جاتا ہے اور پھر کسی نقطہ پر کا دباؤ اور ی کی توہم میں حاصل کیا جاسکتا ہے۔

گھومنے والا سیال

۳۔ اگر سیال کی کچھ مقدار یکساں رفتار سے اور اپنے ذروں کے اضافی مقامات کی تبدیلی کے بغیر (یعنی مستحکم کی طرح) ایک ثابت محور کے گرد گھومے تو گذشتہ مساواتوں کے ذریعہ ہم کسی نقطہ پر کا دباؤ اور مساوی دباؤ کی سطحوں کی نوعیت معلوم کر سکتے ہیں۔

کیونکہ اضافی توازن کی ایسی صورتوں میں سیال کا ہر ذرہ ایک دائرہ میں یکساں رفتار سے حرکت کرے گا اور سیال کے کسی ذرہ پر عمل کرنے والی بیرونی قوتوں اور اس پر کے سیالی دباؤ کا حاصل ہوتا ہے کہ سہارے کے مساوی ہوتا ہے جو محور کی طرف عمل کرتی ہے جہاں سہارے کی رفتار اور ر، محور سے ذرہ کا فاصلہ ہے۔ اس لئے نتیجہ نکلتا ہے کہ بیرونی قوتوں کو اگر سیالی دباؤ اور محور سے عمل کرنے والی قوتوں تک سہارے کے ساتھ ترکیب دیا جائے تو ہمیں سکونی توازن کا ایک نظام ملے گا جس پر دفعتاً گردش کی مساواتیں استعمال ہو سکتی ہیں۔

انتخابی مائع کی کچھ کمیت ایک برتن میں یکساں رفتار سے ایک انتخابی محور کے گرد گھوم رہی ہے۔ کسی نقطہ پر کا دباؤ اور مساوی دباؤ کی سطحیں معلوم کرنا مطلوب ہے۔

انتخابی محور کو محور پر فرض کرو۔ قوت کا سہارے کو محوروں کے متوازی تحلیل کرنے سے اس کے اجزائے تحلیل کی سہارا اور ک سہارا حاصل ہوتے ہیں اور سیالی توازن کی مساوات عام ہو جاتی ہے

$$\text{فرد} = \text{ث} (\text{سہارا فلا} + \text{سہارا فرما} - \text{ج فری})$$

اور اس لئے

$$d = \text{ث} \left\{ \frac{1}{r} \text{سہارا} - (\text{لا} + \text{ما}) - \text{ج ی} \right\} + \text{ہر}$$

اس لئے مساوی دباؤ کی سطحیں گردش کی ممان میں اور اگر برتن کے اوپر کا سہارا کھٹا ہوا ہو تو آزاد سطح مساوات

$$\text{سہارا} (\text{لا} + \text{ما}) - \text{ج ی} + \frac{\text{ہر}}{r} = \frac{\text{ث}^2}{r}$$

سے حاصل ہوتی ہے جہاں ۲ بیرونی دباؤ ہے۔ مستقل کاتین ہر خاص صورت میں مفروضہ چیزوں کی مدد سے کیا جاسکتا ہے۔

مثلاً اگر برتن کا سہارا بند ہو اور مائع سے اس کو بھر دیا جائے اور ۲ = ۰ تو محور کے بلند ترین نقطہ کو مبداء قرار دینے سے ۰ = جبکہ لا، ما، ج ی صفر ہوں اور اس لئے ہر = ۰ اور

$$d = \text{ث} \left\{ \frac{1}{r} \text{سہارا} - (\text{لا} + \text{ما}) - \text{ج ی} \right\}$$

۳۱۔ اب ایک ایسے پیکلہ اور سیال کی صورت پر غور کرو جو ایسے برتن میں بند ہے جو ایک انتخابی محور

کے گرد گھومتا ہے

اوپر کی طرح

فرد = ث { لا فرلا + ما فرما } - ج فرمی {

اور م = ث

∴ م لوک ث = سہ ۲ لا + ۲ ما - ج ی + ہر

اس طرح مساوی دباؤ کی سطحیں اور مساوی کثافت کی سطحیں یکساں بنائیں۔

فرض کر دو کہ برتن اسطوانہ ہے جو اپنے محور کے گرد گھوم رہا ہے اور نیز سیال کی کل کمیت دی ہوئی ہے۔ مستقل معلوم کرنے کے لئے سیال کو عنصری افقی حلقوں میں (ہر ایک کی کثافت یکساں) ترتیب دیا ہوا خیال کرو۔ اور فرض کر دو کہ اونچائی یی پر ایک حلقہ کا نصف قطر ہے اور افقی موٹائی مفف ر، استقامتی موٹائی مفف می ہے، اور اسطوانہ کا نصف قطر اور ارتفاع ف ہے تو

حلقہ کی کمیت = ۲۲ ث ر مفف ر مفف می

اور سیال کی کل کمیت (ک) = $\int \frac{22}{7} r^2 dr$ ث ر فر فرمی

جہاں سب کو اسطوانہ کے قاعدہ میں لیا گیا ہے

اب ث = $\frac{ک}{\int \frac{22}{7} r^2 dr}$ سہ ۲ لا + ۲ ما - ج ی

اور ∴ ک = $\frac{۲۲}{۷} \int \frac{۲۲}{۷} r^2 dr$ سہ ۲ لا + ۲ ما - ج ی (۱ - ۱) (۱ - ۱) (۱ - ۱)

اس مساوات سے ہر معلوم ہو جاتا ہے

۳۲۔ اگر سال یکساں رفتار سے گھوم رہا ہو اور کسی قسم کی قوتوں کے زیر عمل ہو تو توازن کی مساوات عام ہوگی

(۲۵)

فرد = ث { لا فرلا + ما فرما + سہ ۲ لا فرلا + ما فرما } - ج فرمی {

توازن کے امکان کے لئے شرط کی تین مساواتیں پوری ہونی چاہئیں جن سے فرد کا پورا کھلی ہونا ظاہر ہو اور اگر یہ شرطیں پوری ہوں تو مساوی دباؤ کی سطحوں اور بعض صورتوں میں

آزاد سطح کا تعین ہو سکتا ہے لیکن یہ یاد رہے کہ ہمیشہ آزاد سطح کا موجود ہونا ممکن نہیں دراصل آزاد سطح کے وجود کے لئے ضروری ہے کہ مساوی دباؤ کی سطحیں گردش کے محور کے لحاظ سے متشاکل ہوں۔

امثلہ

۱۔ ایک بند ٹی جہاز قص کی شکل میں ہے اور جس کا محور اعظم انتصابی ہے تین مختلف دائروں سے جن کی کثافتیں ρ_1 ، ρ_2 ، ρ_3 ہیں بھر دی گئی ہے۔ اگر سطوح فاصل کے فاصلے کسی ایک ماسک سے علی الترتیب r_1 ، r_2 ، r_3 ہوں تو ثابت کرو کہ

$$r_1(\rho_1 - \rho_2) + r_2(\rho_2 - \rho_3) + r_3(\rho_3 - \rho_1) = 0$$

۲۔ ایک ساکن متجانس مائع کی دی ہوئی کثیت کے ذرات قانون حرکت کے بموجب ایک دوسرے کو جذب کرتے ہیں کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم کرو۔

۳۔ ایک مائع کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے آزاد سطح کے نیچے گہرائی کا مربع۔ (۱) مستطیل رقبہ پر دباؤ معلوم کرو جو انتصاباً عین ڈوبا ہوا ہے اور جس کا ایک سطح سطح میں ہے (۲) دائری رقبہ پر کا دباؤ معلوم کرو جو مائع میں عین ڈوبا ہوا ہے۔

۴۔ مکائی رقبہ کو جو در خاص سے محدود ہے ایک مائع میں انتصاباً عین ڈوبا گیا ہے اور اس مائع کی سطح میں ہے۔ اس پر دباؤ معلوم کرو (۱) جبکہ مائع متجانس ہو (۲) جبکہ مائع کی کثافت ایسی بدلے جیسے گہرائی۔

۵۔ مساوی دباؤ کی سطحیں دریافت کرو جبکہ قوتیں ثابت مرکزوں کی طرف اہل ہوں اور ایسے بدلتی ہوں جیسے ان مرکزوں سے فاصلے۔

۶۔ ایک منتظم چار سطحی (ذواریبہ اسطوح) کو مائع سے بھر دیا گیا ہے اور اس طرح تھا گیا ہے کہ ان کے دو مقابل کے کنارے افقی ہیں۔ اس کے مختلف پہلوؤں پر کے دباؤ کا مائع کے وزن کے ساتھ مقابلہ کرو۔

۷۔ اگر نقطہ O ، A ، B ، C ، D ، E پر نی اکانی کثیت محوروں کے متوازی قوتیں

$$P_1(1-y), P_2(1-y), P_3(1-y), P_4(1-y), P_5(1-y)$$

عمل کریں تو ثابت کرو کہ مساوی دباؤ کی سطحیں قائم رہیں اور مساوی دباؤ اور کثافت

کے منحنی قائم زاہد ہیں۔

۸۔ ایک ٹھوس کرے کے اندر دوسری جوف میں جکے نصف قطر ٹھوس کرے کے نصف قطر کے نصف ہیں لہذا مائع سے بھر دیا گیا ہے۔ ٹھوس اور مائع کے ذرات ایسی قوتوں سے ایک دوسرے کو جذب کرتے ہیں جو ایسے بدلتی ہیں جیسے فاصلہ ثابت کر کے مساوی دباؤ کی سطحیں ٹھوس کرے کے ہم مرکز کرے ہیں۔

۹۔ ثابت کر کے قوتیں جو

لا = مہ (ما + مای + می) + مہ (می + لا + لا) = مہ (لا + لا + ما) سے قیہ جوتی ہیں مائع کی کیت کو ساکن رکھنے کی اگر مائع کی کثافت ایسے بدلے جیسے مستوی لا + ما + می = ۰ سے (فاصلہ ۲) نیز ثابت کر کے مساوی دباؤ اور مساوی کثافت کے کے منحنی دائرے ہیں۔

۱۰۔ اگر ایک مخروطی بیانی مائع سے بھر دیا جائے تو ثابت کر کے مائع کے حجم میں کسی نقطہ پر مگے اوسط دباؤ اور پالہ کی سطح کے ایک نقطہ پر کے اوسط دباؤ میں نسبت ۳:۲ ہوگی۔

۱۱۔ ایک بے وزن برتن قائم مخروط کی شکل کا ہے جس کا ذریعہ راس ۲ مہ ہے۔ برتن کو مائع سے بھر دیا گیا ہے اور اس کو گور کے کسی نقطہ سے لٹکا دیا گیا۔ اگر مخروط کے محور کا میلان انحصالی سمت کے ساتھ ہو تو ثابت کر کے

مہ ۲ مہ = مہ ۲ مہ - ۳ مہ ۲ مہ کے زیر عمل ایک مستوی پر ساکن ہے ۱۲۔ مائع کی کچھ کیت ایک مرکزی اجاذب قوت (پے) کے زیر عمل ایک مستوی پر ساکن ہے قوت کا مرکز مستوی سے ج فاصلہ پر اس طرف درق ہے جس طرف مائع نہیں ہے۔ مائع کی آواز کردی سطح کا نصف قطر اس ہے۔ ثابت کر کے مستوی پر دباؤ

$$= \frac{2}{1} \text{ ث مہ (۱-ج) } ۲$$

۱۳۔ ایک متجانس مائع دو قوتوں کے زیر عمل ساکن ہے جو ایسے بدلتی ہیں جیسے دو ثابت نقطوں سے فاصلوں کے سکوس مربیعے مساوی دباؤ کی سطحیں معلوم کرے۔

اگر منفرد دباؤ کی سطح ایک کرہ ہو تو ثابت کر کے ایسے نقطوں کے طریق میں جن پر دباؤ قوت کے ایک مرکز سے فاصلہ کے بالکس متناسب ہے کرے ہیں۔

۱۳۔ اگر مانع کے ایک عنصر (جہ نقطہ لا، یا ی برہے) پر عمل کرنے والی قوتوں کے اجزائے تحلیل محوروں کے متوازی علی الترتیب

$$ما + ۲ ما ی + ی، می + ۲ می لا + لا، لا + ۲ لا ما + ما$$

کے تناسب ہوں تو ثابت کر دو کہ توازن مکمل ہوگی مگر جس میں حاصل ہونا چاہیے

$$۱ = ۲ = ۲ = ۲ = ۱$$

۱۵۔ مانع کی کچھ کیفیت تو ہوں

$$لا = (ما + ی) - لا، ما = (ی + لا) - ما، ی = (لا + ما) - ی$$

کے زیر عمل توازن میں ہے۔ کثافت معلوم کر اور ثابت کر دو کہ مساوی دباؤ کی سطحیں گردش کرنے والی ہیں۔
۱۶۔ مانع قوت کے ایک میدان میں ساکن ہے جہاں

$$لا = ما + ی - لا، لا = لا، ی = ما + ی - لا، لا = لا، ی = لا + ما - ی$$

ثابت کر دو کہ مساوی دباؤ اور کثافت کے معنی دائروں کا ایک حبشہ ہیں۔

$$۱۷۔ اگر لا = ما + ی، ما = ی + لا، ی = لا + ما، لا = لا$$

تو ثابت کر دو کہ مساوی دباؤ اور کثافت کے معنی ما (لا + ی) = مستقل اور
ما + ی = مستقل سے حاصل ہوتے ہیں

۱۸۔ مساوی دباؤ کی سطحیں معلوم کرو جبکہ کسی نقطہ (لا، ما، ی) پر کی قوتوں کے اجزائے تحلیل ما (ما + ی)، ی (ی + لا)، ما (لا + ما) ہوں ثابت کر دو کہ معلومہ سطحیں
زائد می مکانی نما ہیں

$$ما (لا + ی) = ج (ما + ی)$$

۱۹۔ مانع قوتوں کے دے ہوئے نظام کے زیر عمل متوازن ہے اگر کشم = فہ (لا، ما، ی) کشم = فہ (لا، ما، ی) کسی نقطہ پر کی کثافت کی دو ممکن قیمتیں ہوں تو ثابت کر دو کہ ہر صورت میں مساوی دباؤ کی سطحوں کی مساواتیں

$$فہ (لا، ما، ی) + لہ فہ (لا، ما، ی) = ۰$$

سے حاصل ہوتی ہیں جہاں اختیاری تبدل ہے۔

۲۰۔ ایک کھوکھلا کرہ جس کا نصف قطر $\frac{1}{2}$ ہے اکائی کثافت کے متجانس مائع سے عین بھر دیا گیا ہے۔ اسکو دو خارجی جاذب مرکزوں $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ کے درمیان جگہ! بھی فاصلہ $\frac{1}{2}$ ہے ایسے مقام پر رکھ دیا گیا کہ قوتوں کی وجہ سے اس کے مرکز کشش مساوی و متقابل ہیں۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ پر کا دباؤ ہے

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\}$$

۲۱۔ ایک کرہ جس کا نصف قطر $\frac{1}{2}$ ہے متجانس مائع سے تقریباً بھر دیا گیا ہے یہ کرہ قوت کے دو بیرونی مرکزوں کے زیر اثر ہے جو کرہ کے قطر پر مرکز کی متقابل جاذبوں میں اس کے فاصلوں پر واقع ہیں کسی نقطہ پر قوت کے ہر مرکز کی کشش فاصلہ کے مربع کے تناسب معکوس میں ہے اور مائع کی کمیت پر ان کی کششیں بالترتیب $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ ج ۳ میں ہیں۔

(۱۲۷)

$$\text{اگر } \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \text{ اور } \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \text{ کے درمیان واقع ہوتو}$$

ثابت کرو کہ مرکز پر کا دباؤ ہے

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\}$$

۲۲۔ ایک مائع کی کثافت جو ایک اسطوانی برتن میں ہے ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی۔ اس کو دوسرے برتن میں منتقل کیا گیا ہے جس میں کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کا مربع۔ اس نئے برتن کی شکل معلوم کرو۔

۲۳۔ ایک مستطیل مخروط جس کا ذریعہ $\frac{1}{2}$ ہے پانی سے عین بھر دیا گیا ہے اور اس کی ایک کون ایک افقی مستوی میں مضبوط چوڑو دیا گیا ہے مستوی کو یکساں زاوی رفقار سے ایک انحصالی محور کے گرد جو مخروط کے راس میں لگوتا ہے گھمایا گیا ہے۔ بڑی سے بڑی

رفا معلوم کر دے جس سے بلند ترین نقطہ پر دباؤ صفر ہو سکے اور اس صورت میں قاعدہ پر کا دباؤ بھی معلوم کر دے۔

۲۴۔ ایک سیدھا ڈنڈا جس کا ہر ذرہ ایسی قوت سے کشش کرنا ہے جو فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے متجانس بے پیک سیال کی کیت سے گواہا ہے۔ مساوی دباؤ گائے سطحوں کی شکل معلوم کر دے۔

۲۵۔ ایک بین دار مانع انتہی متوی رہتا ہوا ہے اور ایک ثابت مرکز کی طرف ایسی مستقل قوت سے جذب ہو رہا ہے جس کی شدت جاذبہ ارض کے مساوی ہے۔ مساوی دباؤ کی سطحوں کی شکل معلوم کر دے۔

نیز مستوی پرکا دباؤ معلوم کر دے اور ثابت کر دے کہ جب مستوی قوت کے مرکز میں سے گزرتا ہے تو ہر دباؤ مانع کے وزن کا $\frac{1}{2}$ ہوتا ہے۔ نیز مستوی پرکا دباؤ اس صورت میں بھی معلوم کر دے جبکہ مستوی قوت کے مرکز کے نیچے یا اوپر واقع ہو۔

۲۶۔ ایک ہڈت خول کا دوروی سطحیں احاطہ کرنی میں جو ہم مرکز نہیں خول کا مادہ قدرت کے قانون کی بوجہ کشش کرتا ہے خول کے اندر کے حصہ کو متجانس مانع سے جڑا بھردیا گیا ہے جو اس کے ساتھ یکساں تھاں سے کون کے مرکزوں میں سے گزرنے والے خطہ تینم کے گرد گھومتا ہو ثابت کر دے کہ اس طرح کوئی مکانی ہجو

۲۷۔ ایک استوار دوروی خول متجانس بے پیک سیال سے بھر دیا گیا ہے جس کا ہر ذرہ ایک دوسرے کو ایسی قوت سے جذب کرتا ہے جو فاصلے کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے ثابت کر دے کہ سطح پر کے دباؤ اور سیال کے کسی اندرونی نقطہ پر کے دباؤ کا فرق اس نقطہ میں سے گزرنے والی کرہ کی چھوٹی سے چھوٹی تراش کے رقبہ کے متناسب ہے۔

۲۸۔ ایک کھلا برتن جس میں مانع ہے یکساں تراوی رفا سے ایک انتصابی محور کے گرد گھمایا گیا ہے برتن کی شکل اور اس کے الباء معلوم کر دے وہ عین غالی ہو جائے۔

۲۹۔ متجانس سیال کی ایک غیر محدود کیت ایک بند سطح کے گرد ہے اور سطح کے اندرونی نقطہ (۱) کی طرف ایسی قوت سے جذب ہو رہی ہے جو فاصلے کے کعب کے متناسب معکوس میں ہے اگر سطح کے کسی نقطہ ن پر کے عنصر پر جو دباؤ ہے اُسے سمت ن و میں تحلیل کیا جائے تو ثابت کر دے کہ اس طرح حاصل شدہ تمام نقطوں کے قطری دباؤں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے خواہ سطح کی جسامت اور اس کی شکل کچھ ہی ہو بشرطیکہ نقطہ ن سے لا متناہی

۳۴۔ مانع کی کچھ مقدار جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی ایک اسٹے مکانی نما میں جس کا ترغاص ج ہے ف ارتفاع تک بھری ہوئی ہے ثابت کر دو کہ اس کی کثافت ایسے بدلے گی جیسے گہرائی کا مربع اگر اس کو ایسے برتن میں منتقل کیا جائے جسکی شکل منحنی

$$۱۶۱ = ۲ ج ف^۲ (۱ - ۱۲ - ۱۲)$$

کو محور لاکے گرد گھمانے سے حاصل ہوتی ہے جہاں کوئی مستقل ہے۔

۳۵۔ جاذب بالذات مانع کی کمیت جسکی کثافت ث ہے تو وزن میں ہے قانون کشش معکوس مربع کا قانون ہے۔ ثابت کر دو کہ مانع کے کسی کرہ میں اوسط دباؤ مرکز پر کے دباؤ سے

$$۱۶۲ = ۲ ث^۲ کے کم ہوگا جہاں ر کرہ کا نصف قطر ہے۔$$

۳۶۔ ایک بند کھوکھلا قائم مستدبر مخروط ایک افقی مستوی پر اپنے قاعدہ پر کھڑا ہوا ہے۔ اس کو مانع سے عین بھر دیا گیا جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی۔ اس کے بعد اسکو الٹ کر اس طرح تھما گیا ہے کہ اس کا اس عین مستوی پر جو اور محور امتصافی ہو۔ ثابت کر دو کہ اسکی منحنی سطح پر کا حاصل دباؤ مقدار میں غیر متغیر رہتا ہے لیکن مانع کی توانائی بالقدہ نسبت

$$۲ \left\{ جا \left(\frac{۱}{۲} \right) \right\} : ۳ جا \left(\frac{۱}{۲} \right)$$

سے بد جاتی ہے۔ یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ اگر مانع کو مستوی پر ڈال دیا جائے تو توانائی بالقدہ صفر ہوتی ہے۔

۳۷۔ ایک سیال قانون

$$(ث - ث۱) = (د - د۱)$$

کے مطابق خفیت طور پر رہتا ہے جہاں ہ ایک چھوٹی مقدار ہے۔ ثابت کر دو کہ اس سیال کی

$$۱۶۳ = ث۱ ث۲$$

کثافت اپنے ذاتی تجانب اور بیرونی دباؤ د کے زیر عمل ایک کردی شکل اختیار کرتی ہے جس کا نصف قطر تقریباً

$$۱۶۴ = \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \right) \times \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \right)$$

ہے جہاں م تجاذب کا مستقل ہے۔

۳۸۔ گیس کی ک کیت جو مستقل پیش ہے تمام فشار میں پھیلا دی گئی ہے اور ہر نقطہ

(لا، ما، ی) پرتوت (فی اکائی کیت) کے اجزائے تحلیل - ولا - ب، ما، - ج، ی ہیں۔
مبادیہ برداؤ اور کثافت علی الترتیب د اور ث کے مساوی ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$ا ب ج ث ک = ۸ ۳۲ ۶۴$$

۳۹۔ ہوا کی دی ہوئی کیت ایک ہوا بند اسطوانہ میں ہے جس کا محور انصافی ہے ہوا اسطوانہ کے محور کے گرد، انصافی توازن میں گھوم رہی ہے۔ محور کے بلند ترین نقطہ پر د باؤ د اور اس کی متغیٰ سطح کے بلند ترین نقاط پر د باؤ د ہے ثابت کرو کہ اگر سیال مطلق طور پر ساکن ہوتا تو محور کے بالائی نقطہ پر ک د باؤ

(د-۵) ہوتا، جہاں ہوا کا وزن بھی محسوب کیا گیا ہے۔
لوک د- لوک د

۴۰۔ گیس کی کچھ کیت مستقل تپش پر ایسی قوتوں کے زیر عمل ساکن ہے جن کا قوت فضا کے کسی نقطہ پر نہ ہے (فضا کے محدودی شرائط کچھ بھی ہو سکتے ہیں)۔ اس نقطہ جہاں نہ صفر ہوتا ہے، د باؤ ۱۱ اور کثافت ث ہے۔

اب گیس پر سے قوتوں کا عمل مٹا دیا گیا ہے اور اس کو ایسی فضا میں بند کیا گیا جسے ہمیں اس کی کثافت یکساں مٹا رہتی ہے۔ ثابت کرو کہ پھیلاؤ کے باعث گیس میں ذاتی باؤ، الی، بالقوہ کا نقصان ہے۔

$$ث ب کر کر نہ نو شہ فرح$$

جہاں تک کل گیس بھر میں لئے گئے ہیں جبکہ وہ ابتدائی حالت میں تھی۔
۴۱۔ ایک پھیلاؤ سیال کی دی ہوئی کیت ک ایک استوار خول میں داخل کی گئی

$$اس خول کی سادات = \frac{۱}{۱۶} + \frac{۲}{۱۶} + \frac{۳}{۱۶} = ۱ ہے اور سیال کے لئے کلید د- ث$$

درست رہتا ہے یہ سیال ایسی قوتوں کے نظام کے زیر عمل سکوں اختیار کرتا ہے جس کا قوتی

$$تفاعل ہے = \frac{۱}{۱۶} + \frac{۲}{۱۶} + \frac{۳}{۱۶} + \frac{۴}{۱۶} + \frac{۵}{۱۶} + \frac{۶}{۱۶} + \frac{۷}{۱۶} + \frac{۸}{۱۶} + \frac{۹}{۱۶} + \frac{۱۰}{۱۶} + \frac{۱۱}{۱۶} + \frac{۱۲}{۱۶} + \frac{۱۳}{۱۶} + \frac{۱۴}{۱۶} + \frac{۱۵}{۱۶} + \frac{۱۶}{۱۶}$$

اگر سطح

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

کے کسی نقطہ پر دباؤ نہ ہو تو ثابت کرو کہ خول کے اندر کثیت کے مساوی حصوں کے حساب سے اوسط دباؤ ہوگا

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

۴۲ — ایک بند نصف کرہی برتن کا نصف قطر ہے۔ اسکو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کی مستوی سطح افقی اور اوپر وار رہے اس میں متجانس وزن درائع ڈالا گیا ہے جو محور کی طرف ایسی قوت سے جذب ہوتا ہے جو محور سے فاصلہ کے معکب کے تناسب میں ہے۔ مانع کا حجم اس قدر ہے کہ اس کی آزاد سطح نصف کرہ کو اس سے زاویہ فاصلہ $\frac{\pi}{3}$ پر ملتی ہے۔ اگر یہ نظام محور کے گرد یکساں زاویہ زفناں سے گھومے تو آزاد سطح برتن کے مستوی سطح کو کنارہ پر ایسے دائرہ میں ملتی ہے جس کا نصف قطر بے ثابت کر دو کہ اکائی فاصلہ یہ قوت سے $\frac{1}{2}$ ہو جی چاہیے اور ب اور س مساوات ذیل سے مربوط ہیں

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

۴۳ — مانع کی کچھ یکساں کثیت کر دی شکل کی ہے۔ اس کی کثافت ρ ہے اور نصف قطر اس کے گرد دوسرے بے پیک مانع ہے جس کی کثافت σ ہے اور بیرونی نصف قطر b ہے۔ یہ پورا نظام صحت اپنے ذاتی متوازن کی وجہ سے توازن میں ہے اور نیز کوئی بیرونی دباؤ عمل نہیں کرتا۔ ثابت کرو کہ مرکز پر کا دباؤ ہے

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

۴۴ — ایک بے پیک سیال کی یکساں کر دی کثیت جس کی کثافت ρ ہے اور نصف قطر a ہے دوسرے بے پیک سیال سے جس کی کثافت σ ہے اور بیرونی نصف قطر b ہے گھری ہوئی ہے پورا سیال اپنے جائزہ کی وجہ سے متوازن ہے اور کوئی بیرونی دباؤ یا قوتیں عمل نہیں کرتیں دونوں سیالوں کو ملا کر اسی حجم کا ایک متجانس سیال تیار کیا گیا ہے اور پھر یک کثیت کر دی شکل

میں متوازن ہو جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ پہلی صورت میں مرکز پر کا دباؤ دوسری صورت میں مرکز پر کے دباؤ سے بقدر

$$\frac{a}{r} \pi (n-1) \left(\frac{1}{b} - 1 \right) \left[\frac{1}{m} \left(\frac{n}{s} - 1 \right) (1 + \frac{1}{b}) + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{b} + 1 \right) \right] \quad \text{کے بڑا ہے۔}$$

۴۵۔ ایک متجانس تجاذبی ٹھوس سطح $a = \{1 + \frac{1}{m} \pi (n-1) \}$ سے محدود ہے۔ اس ٹھوس کی کیت k اور کثافت ρ ہے اور a اتنا چھوٹا ہے کہ اس کا مربع نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یہ ٹھوس ایک تجاذبی مائع سے جسکی کیت k اور کثافت ρ سے گھرا ہوا ہے ثابت کرو کہ آزاد سطح کی مساوات تقریباً

$$r = b \{1 + \frac{1}{m} \pi (n-1) \}$$

ہے جہاں

$$b = \frac{3}{4\pi} \left\{ \frac{k}{\rho} + \frac{k}{\rho} \right\}$$

اور

$$b = \frac{3}{4\pi} \left\{ \frac{k}{\rho} + \frac{k}{\rho} \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{m} \left(\frac{n}{s} - 1 \right) (1 + \frac{1}{b}) + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{b} + 1 \right) \right\}$$

۴۶۔ ایک یکساں بے پچک سال کی کیت تجاذبی اکائیوں میں k ہے۔ اپنی ذاتی کشش کے زیر اثر یہ ایک کرہ کی شکل اختیار کرتا ہے جس کا نصف قطر a ہے اسکو ایک کمزور قوت کے میدان میں رکھا گیا ہے جس کا تجاذبی قوت ہے

$$F = \frac{1}{r^2} \left(\frac{n}{s} - 1 \right) \left(\frac{1}{b} + 1 \right)$$

جہاں a کی ادھار کو s سطح کے مرکز سے r ناپا گیا ہے۔ m کے غور کی رتوں کے مربع نظر انداز کئے جاسکتے ہیں۔ ثابت کرو کہ آزاد سطح کی مساوات ہے۔

$$\frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{ع (جہلم)}$$

۴۷۔ اگر میں کہتا ہوں کہ ایک کرو خیل میں تارے کو ثابت کر کہ اس کے مرکز پر باؤں سے
یونٹوں میں فٹ ہوگا جہاں زمین کے مادہ کے ایک کعب فٹ کثرت کا وزن مثلاً رہا ہے اور زمین
کا نصف قطر ۱ فٹ۔

۴۸۔ تجاذبی مائع کا ایک کرہ ہے جس کا نصف قطر اسے کسی نقیصہ پر اس کی کثافت یکساں طور
پر بڑھتی جاتی ہے جیسے وہ نقطہ مرکز کے قریب آتا ہے اسے سطحی کثافت مثلاً ۱۱ اور اوسط
کثافت ۱۲ ہے۔ ثابت کر کہ مرکز پر کا دباؤ ہے

$$\frac{1}{2} = \{ 1.0 \text{ (ث - ثب)} + 3 \text{ (ث - ثب)} \}$$

۴۹۔ تجاذبی تیل کا ایک کرہ ہے جس کا نصف قطر ہے۔ مساوی کثافت کی سطحیں
حدود کی سطح کے ساتھ ہم مرکز رہے ہیں۔ اور آزاد سطح سے مرکز کی طرف جانے میں کثافت کسی
قانون کی بموجب بڑھتی جاتی ہے۔ ثابت کر کہ مرکز پر کا دباؤ اس دباؤ سے جبکہ کثافت یکساں
ہو فہر

$$\frac{1}{2} = 3 \text{ (ث - ثب)} \text{ (ث - ثب)} \text{ (ث - ثب)}$$

کے بڑا ہوتا ہے جہاں ت پوری کثیت کی اوسط کثافت کو اور ث اس حصہ کی اوسط کثافت
کو تعبیر کرتا ہے جو مرکز سے رفاصلہ کے اندر ہے اور جب تجاذب کا مستقل ہے۔

(۳۱)

باب سوم

سطحوں پر سیالات کا حاصل دباؤ

۳۳۔ ہم نے گذشتہ باب میں یہ دیکھا ہے کہ سیال کے کسی نقطہ پر دباؤ کس طرح معلوم کیا جاتا ہے جبکہ سیال دی ہوئی قوتوں کے زیر عمل ساکن ہو۔ اب ہم ان دباؤ کے حاصل دریافت کرینگے جو سیال سطحوں پر پیدا کرتے ہیں جن کے ساتھ وہ تماس رکھتے ہوں۔
سطحوں پر سیال کے عمل کو ہم اس ترتیب سے بحث میں لائیں گے۔ پہلی سیالات کا حاصل مستوی سطحوں پر بھرجاؤ بہ ارض کے ماتحت سیال کا عمل منحنی سطحوں پر اور آخر میں کسی دی ہوئی قوتوں کے ماتحت ساکن سیال کا عمل منحنی سطحوں پر۔

مستوی سطحوں پر سیالی دباؤ

چونکہ مستوی کے تمام نقطوں پر دباؤ مستوی پر عمود وار ہوتے ہیں اور ایک ہی سمت میں عمل کرتے ہیں اس لئے حاصل دباؤ ان تمام دباؤں کا مجموعہ ہوتا ہے۔
پس اگر سیال بے پچک ہو اور صرف جاذبہ ارض کے زیر عمل ہو تو کسی مستوی پر کا حاصل دباؤ

$$= \rho \cdot g \cdot h$$

جہاں ρ سے مستوی کا رقبہ اور h سے اس کے مرکز ہندسی کی گہرائی تعبیر ہوتی ہے۔

عام طور پر اگر سیال کسی قسم کا ہوا دی ہوئی قوتوں کے زیر عمل ساکن ہو تو مستوی کے اندر محور لا اور مالو اور فرض کر دو کہ نقطہ (لا) پر دباؤ p ہے۔

تورفہ کے غصہ مٹ لا مٹ مایر کا دباؤ = د مٹ لا مٹ م
 ∴ حاصل دباؤ = $\frac{d}{r} \times r$ فرما فر لا

جہاں تکمیل کل رقبہ زیر بحث لیا گیا ہے
 اگر قطبی محدود استعمال کے جائیں تو حاصل دباؤ

$$= \frac{d}{r} \times r \times \text{مرطہ}$$

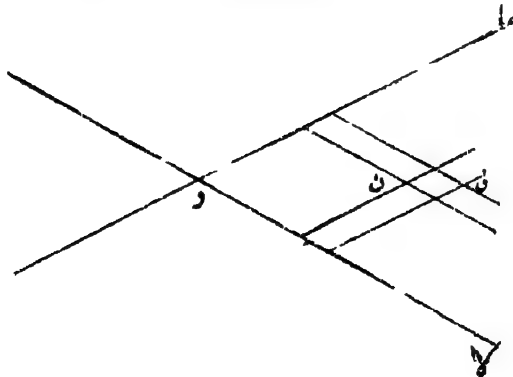
۳۴۔ قطریف۔ سطح مستوی کی صورت میں دباؤ کا مرکز وہ نقطہ ہے جہاں مستوی سے اس
 تنہا قوت کی سمت لیتی ہے جو مستوی سطح پر کے تمام سیالی دباؤں کے حاصل کے مساوی ہے۔

یہاں دباؤ کے اثرات تعریف مستوی سطحوں کے لحاظ سے کی گئی ہیں۔ آئندہ یہ معلوم
 ہوگا کہ سختی سطحوں پر سیارہ حاصل مل ہمیشہ ایک تنہا قوت میں تحلیل نہیں کیا جاسکتا۔ (۳۲)

وزن داریال کی صورت میں یہ ظاہر ہے کہ افقی رقبہ کا دباؤ کا مرکز اس کا مرکز ہمدسی ہوگا کیونکہ
 اس کے ہر نقطہ پر کا دباؤ مساوی ہے اور چونکہ گہرائی کے بل پر ہونے کے ساتھ دباؤ بھی بڑھتا جاتا
 ہے اس لئے غیر افقی مستوی میں دباؤ کا مرکز ہمدسی کے نیچے واقع ہوگا۔

کسی مستوی رقبہ کا دباؤ کا مرکز معلوم کرنے کے لئے سنا بیٹے۔ فرض کرو کہ مستوی کے اندر
 علی القوائم محاورے کے لحاظ سے کسی نقطہ کے محدود (لا، ما) ہیں اور اس پر کا دباؤ د، اور
 اس کے ساتھ کے نقطہ کے محدود (لا، ما + مٹ لا، ما + مٹ ما) ہیں۔

نیز (لا، ما) دباؤ کے مرکز کے محدود ہیں۔



تو $\bar{M} \times \text{کر د فرما فرلا} = \text{دلا کے گرو حاصل دباؤ کا سمیاری}$
 $= \text{دلا کے گرو رقبہ کے تمام عناصر پر کے دباؤں کے سمیاریوں کا مجموعہ}$

$$= \bar{M} \times \text{د م ف م م ف لا} \times \bar{M}$$

$$= \text{کر د م فرما فرلا}$$

$$\bar{M} = \frac{\text{کر د م فرما فرلا}}{\text{کر د فرما فرلا}}$$

$$\bar{L} = \frac{\text{کر د لا فرما فرلا}}{\text{کر د فرما فرلا}} \quad \text{اسی طرح}$$

تکملے رقبہ زیر بحث پر لئے گئے ہیں۔
 اگر قطبی محور استعمال کئے جائیں تو اسی طرح کے طریق عمل سے

$$\bar{L} = \frac{\text{کر د ر جم ط فر فر فرط}}{\text{کر د ر فر فر فرط}}, \quad \bar{M} = \frac{\text{کر د ر ج ب ه فر فر فرط}}{\text{کر د ر فر فر فرط}}$$

۳۵۔ اگر سیال متجانس اور بے چسبک ہو اور صحت جاذبہ ارض ہی عمل کرے تو
 د ج ت گ

جہاں گ سطح کے نیچے نقطہ ن کی گہرائی ہے۔ اس لئے اس صورت میں

$$\bar{L} = \frac{\text{کر گ لا فرما فرلا}}{\text{کر گ فرما فرلا}}, \quad \bar{M} = \frac{\text{کر گ م فرما فرلا}}{\text{کر گ فرما فرلا}} \quad \dots (۴۵)$$

بعض اوقات مستوی اور سیال کی سطح کے خط تقاطع کو ایک محور مقرر کرنا سفید ثابت ہوتا ہے۔ اگر
 اس خط کو ہم محور لا فرض کریں اور مستوی اور افق کے درمیان زاویہ ط ہو تو

د = ج ث ماحب طہ ، اور اس لئے

$$\frac{\text{لا} = \frac{\text{لا} \text{ لا مافرلا}}{\text{لا مافرلا}}}{\text{لا} = \frac{\text{لا} \text{ لا مافرلا}}{\text{لا مافرلا}}} \quad (۳)$$

ان آحی مساواتوں (۲) سے ظاہر ہے کہ دباؤ کے مرکز کا مقام مستوی اور افق کے درمیانی زاویہ پر منحصر نہیں ہوتا۔ اس لئے اگر مستوی اور سیال کی سطح کے خط تقاطع کے گرومستوی کو گھمایا جائے تو دباؤ کے مرکز کے مقام میں تبدیلی واقع نہیں ہوگی۔

اگر مساواتوں (۲) میں گ کو مستقل قرار دیا جائے یعنی اگر مستوی کو واقعی فرض کیا جائے تو اور مآثر قہ کے مرکز ہنسی کے محدود ہو جاتے ہیں اور یہ نتیجہ دفعہ ۳ کے مطابق ہے۔

بیکس مساواتوں (۲) میں لا اور مآ کی قیمتیں ط پر منحصر نہیں ہیں اور ط کے محدود ہونے سے ان کی شکل میں کوئی فرق نہیں آتا اور اس صورت میں مرکز ہندسی کے محدود حاصل نہیں ہوتے۔

اس ظاہری سبب سے ظاہر کی گئی تو یہ اس طرح ہو سکتی ہے۔ ط کو کٹا ہی چھوٹا لیا جائے مستوی اور مال کی سطح کا درمیانی سیال پیشہ نہ کی شکل میں ہوگا۔ اور مستوی کے مختلف نقاط پر کے دباؤ اگرچہ انتہا میں سبب محدود ہوتے ہیں لیکن یہ مساویت کی نسبتوں میں محدود نہیں ہوتے بلکہ ط کی کسی محدود قیمت کے لئے یہ دباؤ جو مستقل نسبتیں آپس میں رکھتے ہیں ان مستقل نسبتوں میں یہ صفر ہوتے ہیں۔

اس دفعہ کی مساواتیں استدلال ذیل سے بھی حاصل ہو سکتی ہیں۔

مستوی رقبہ کو محدود کرنے والے خط کے ہر نقطہ سے انتصابی خط و سیال کی سطح تک کھینچ کر اس سیال کی کچھ کثیت ان میں گھر جائیگی۔ اس مستوی کے تعادل کا انتصابی بہ و تحلیل سیال کی اس کثیت کے وزن کے برابر ہوگا اور یہ وزن کثیت کے مرکز میں سے گزرنے والے انتصابی خط میں عمل کرے گا اور جہاں پر یہ خط مستوی رقبہ کو طے گا وہ دباؤ کا مرکز ہوگا۔

وہی محور تو ایک عنصری محور کا وزن جو مستوی کے نقطہ (لا، مآ) میں سے عمل کرتا ہے ج ث گ مع لا مع مآ جو ط ہوگا جہاں افق کے ساتھ مستوی کا میلان ط ہے اور اس نے مستوی کے نقطوں پر عمل کرنے والی ان متوازی قوتوں کا مرکز مساواتوں

$$\begin{aligned} \text{لا} - \frac{\text{ا ا ج ٹ گ لاجم ط فرما فرلا}}{\text{ا ا ج ٹ گ جم ط فرما فرلا}} &= \text{ما} - \frac{\text{ا ا ج ٹ گ لاجم ط فرما فرلا}}{\text{ا ا ج ٹ گ جم ط فرما فرلا}} \text{ سے لینے} \\ \text{لا} - \frac{\text{ا ا گ لا فرما فرلا}}{\text{ا ا گ فرما فرلا}} &= \text{ما} - \frac{\text{ا ا گ ما فرما فرلا}}{\text{ا ا گ فرما فرلا}} \text{ سے حاصل ہوتا ہے۔} \end{aligned}$$

پس یہ ظاہر ہے کہ دباؤ کے مرکز کی گہرائی گھر سے ہوائیال کی کمیت کے مرکز کی گہرائی کا دو چند ہے۔

۳۶۔ وزن دار مالع کی صورت میں دباؤ کے مرکز کا مقام مسئلہ ذیل سے ہندسی طور پر حاصل ہو سکتا ہے۔

اگر رقبہ کے مستوی میں ایک ایسا خط مستقیم لیا جائے جو مالع کی سطح کے متوازی اور رقبہ کے مرکز ہندسی سے اتنا ہی نیچے واقع ہو جتنا اس سے (مرکز ہندسی سے) مالع کی سطح اوپر واقع ہے تو اس خط مستقیم کا قطب بلحاظ مرکز ہندسی پر کے میاری قطع ناقص کے جس کے نیم محور اس نقطہ پر گردش کے صدری نیم قطر ہیں دباؤ کا مرکز ہوگا۔

رقبہ کو ۱ اور گردش کے صدری نصف قطروں کو ۱، ب، فرض کر دو تو یہ صدری نصف قطران مساواتوں سے معلوم ہوتے ہیں۔

$$\text{ا ب} = \frac{\text{ا ا فرلا فرلا}}{\text{ا ا فرلا فرلا}} \quad \text{ا ا} = \frac{\text{ا ا فرلا فرلا}}{\text{ا ا فرلا فرلا}}$$

میاری (Moment) ناقص کی مساوات ہے

$$۱ = \frac{\text{لا}^۲}{۲} + \frac{\text{ما}^۲}{۲}$$

جہاں حوالے کے محور مرکز ہندسی پر کے صدری محور ہیں۔
فرض کرو کہ لا، ما دباؤ کے مرکز کے محد ہیں اور سطح میں کے خط کی مساوات ہے

$$\text{لاجم ط} + \text{ماجم ط} = \text{ع}$$

$$\text{تو } \frac{((ع - لا) جم طه - ما جب طه) لا فلا فرما}{((ع - لا) جم طه - ما جب طه) فلا فرما} = \frac{لا^2}{ع} \text{ جم طه}$$

اور اسی طرح $ما = \frac{پا^2}{ع} \text{ جب طه}$

∴ (لا ، ما) خط مستقیم

$$لا \text{ جم طه} + ما \text{ جب طه} = ع$$

کا قطب بلحاظ معیاری ناقص کے ہے۔

۳۷۔ دباؤ کا مرکز معلوم کرنے کی مثالیں۔

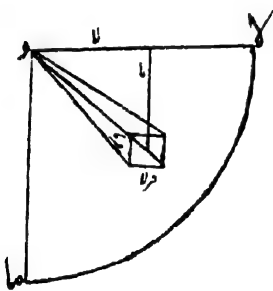
(۱) دائرہ کا ایک ربع انحصاری سمت میں ایک وزن دار استجاسر مانع میں عین ڈبو گیا ہے

اور اس کا ایک کنارہ مانع کی سطح میں ہے۔

اگر سطح کے اندر کے کنارے ولا کو

محور لا قرار دیا جائے تو

$$\frac{لا^2}{ع} = \frac{لا^2}{ع} \text{ جم طه} \text{ فلا} \\ \frac{لا^2}{ع} = \frac{لا^2}{ع} \text{ جم طه} \text{ فلا}$$



(۳۵)

$$\frac{لا^2}{ع} = \frac{لا^2}{ع} \text{ جم طه} \text{ فلا}$$

ما کے لئے حدود مکمل وہی ہیں جو لا کے لئے ہیں۔

$$\text{اب چونکہ } لا^2 \text{ جم طه} = \frac{لا^2}{ع} \text{ فلا} = \frac{لا^2}{ع} \text{ فلا}$$

$$لا^2 \text{ جم طه} = \frac{لا^2}{ع} \text{ فلا} = \frac{لا^2}{ع} \text{ فلا}$$

$$لا^2 \text{ جم طه} = \frac{لا^2}{ع} \text{ فلا} = \frac{لا^2}{ع} \text{ فلا}$$

$$\therefore \bar{L} = \frac{3}{8} A \quad \bar{M} = \frac{3}{14} A$$

قطبی محور استعمال کرنے سے اور دلا کو ابتدائی خط لینے سے ہمیں دھج ث ر جب ط حاصل ہونا چاہیے اور

$$\bar{L} = \frac{\text{کرکر ر جب ط فر فرط}}{\text{کرکر ر جب ط فر فرط}} = \frac{3}{8} A$$

$$\text{اور } \bar{M} = \frac{\text{کرکر ر جب ط فر فرط}}{\text{کرکر ر جب ط فر فرط}} = \frac{3}{14} A$$

(۲) ایک دائری رقبہ جس کا نصف قطر ہے انتصابی سمت میں ڈبوا گیا ہے اور اس کا مرکز ہندی گہرائی تک پرواق ہے۔

مرکز کو مبدأ اور اس میں سے گزرنے والے نیچے وار انتصابی خط کو ابتدائی خط قرار دے۔ اگر نقطہ (ر، ط) پر کا دباؤ د ہو تو

$$d = \text{ج مٹ (گ + ر جم ط)}$$

اور مرکز کے نیچے دباؤ کے مرکز کی گہرائی

$$\frac{2}{\text{مگ}} = \frac{\text{کرکر ر جم ط (گ + ر جم ط) فر فرط}}{\text{کرکر ر (گ + ر جم ط) فر فرط}}$$

نتیجہ دفعہ (۳۶) کے مسئلہ سے فوراً اخذ کیا جاسکتا ہے۔

(۳) ایک انتصابی سطح جس کا عرض اتنی ہے کہ ہوائی کے زیر عمل ہے جو مستقل تپش پر ہے۔

اگر مستطیل کے قاعدہ پر کہہ ہوائی کا دباؤ ۲۱ ہو تو ی لمبندی پر دباؤ ۲۱ نوم ہوگا دفعہ (۳۷) اور اگر ب سے مستطیل کا عرض تبیین مستطیل کی ایک انقی پٹی پر کا دباؤ

$$21 = \text{نوم} \times \text{ب مٹ ی}$$

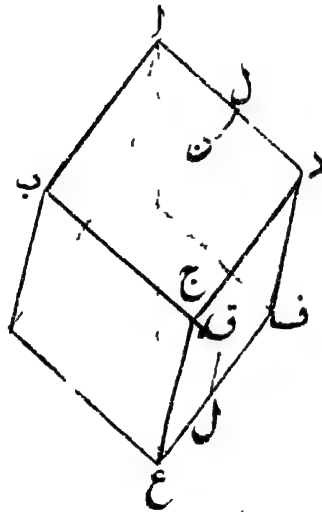
اگر مستطیل کا طول و ہو تو اس پر کا حاصل دباؤ

$$= \frac{1}{2} \frac{ج}{م} \frac{ب}{ج} = \frac{ب}{م} (1 - \frac{1}{م})$$

اور دباؤ کے مرکز کی بلندی

$$\frac{1}{\frac{1}{م} - \frac{1}{ج}} = \frac{1}{\frac{ج}{م} - \frac{ج}{ج}} = \frac{1}{\frac{ج}{م} - 1}$$

(۴) ایک کھوکھلا کعبہ مانع سے تقریباً باہر دیا گیا ہے۔ یہ کعبہ ایسے ایک انتہائی دتر کے گرد یکساں طور پر رکھو متا ہے۔ ان کے مختلف رخوں پر کے دباؤ اور ان کے دباؤ کے مرکز معلوم کرو۔



۱۔ اوپر کے رخ ا ب ج د کئے۔
ا د، ا ب کو محور لا اور محور ما قرار دو۔ اور فرض کرو کہ کسی نقطہ ن (لا، ا، ا) کے نقطہ ڈ سے افقی اور انتہائی فاصلے می اور ر ہیں تو

$$\frac{ن}{ا} = \frac{1}{4} \frac{ا}{ب} + ج$$

ی = $\frac{ا+ب}{۳۷}$ ، شکستہ خط ا ل ن کا ا ع پر نکل لینے سے،

$$r = \frac{1}{2} (a + b) - \frac{1}{2} (a - b) = \frac{1}{2} (a + b) - \frac{1}{2} (a - b)$$

∴ رخ ا ب ج د پر کا دباؤ (۵)

$$= \frac{1}{2} (a + b) - \frac{1}{2} (a - b)$$

$$= \frac{1}{2} (a + b) - \frac{1}{2} (a - b) = \frac{1}{2} (a + b) - \frac{1}{2} (a - b)$$

$$= \frac{1}{2} (a + b) - \frac{1}{2} (a - b)$$

دباؤ کا مرکز مساواتوں

$$L = 5 = 5 = \frac{1}{2} (a + b) - \frac{1}{2} (a - b) = \frac{1}{2} (a + b) - \frac{1}{2} (a - b)$$

$$L = 5 = 5 = \frac{1}{2} (a + b) - \frac{1}{2} (a - b) = \frac{1}{2} (a + b) - \frac{1}{2} (a - b)$$

سے حاصل ہوگا۔

۲۔ نیچے رخ ع ج د ف کے لئے۔

ع ف اور ع ج کو محاور قرار دو۔ تو کسی نقطہ کے لئے

$$y = \frac{1}{2} (a + b) - \frac{1}{2} (a - b)$$

$$r = \frac{1}{2} (a + b) - \frac{1}{2} (a - b)$$

اور نتیجہ عمل بالکل پہلی صورت کی طرح۔

۵۔ دائرہ کا ایک رخ انتصابی سمت میں ایک ماتے میں مین ڈبو یا گیا۔ دائرہ ایک کنارہ

(۳۷)

ملنے کی سطح میں ہے اور ماتے کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی۔

سطح کے اندر کے کنارے کو محور ولا قرار دیں تو $f = r$ ، $d = \frac{1}{2} (a + b)$

اس لئے دباؤ کا مرکز مساواتوں

$$\bar{\alpha} = \frac{\text{کر } \alpha \text{ فرما فرلا}}{\text{کر } \alpha \text{ فرما فرلا}} \text{ اور } \bar{\alpha} = \frac{\text{کر } \alpha \text{ فرما فرلا}}{\text{کر } \alpha \text{ فرما فرلا}} \text{ سے حاصل ہوا}$$

قطبی محددوں میں

$$\bar{\alpha} = \frac{\text{کر } \alpha \text{ رجب طہ جم طہ فر فرطہ}}{\text{کر } \alpha \text{ رجب طہ فر فرطہ}} \text{ اور } \bar{\alpha} = \frac{\text{کر } \alpha \text{ رجب طہ فر فرطہ}}{\text{کر } \alpha \text{ رجب طہ فر فرطہ}}$$

جنہ

$$\bar{\alpha} = \frac{114}{315} \text{ اور } \bar{\alpha} = \frac{132}{315}$$

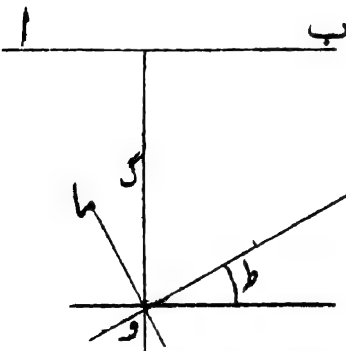
حاصل ہوتے ہیں۔

(۶) ایک نصف دائری رقبہ پانی میں پوری طرح ڈبو دیا گیا ہے دائرہ کی سطح اقتصادی ہے اس کو احاطہ کرنے والے قطر کا ایک سرا مان کی سطح میں ہے فرض کرو کہ قطر اور مان کی سطح کا درمیانی زاویہ α ہے اور قطر اور α پر کے ماس کو محاور مان کر دباؤ کے مرکز کے محدد (α) میں تو

$$\text{لا کر } \alpha \text{ رجب (طہ + عم) فر فرطہ} = \text{کر } \alpha \text{ رجب طہ جب (طہ + عم) فر فرطہ}$$

$$\text{اور لا کر } \alpha \text{ رجب (طہ + عم) فر فرطہ} = \text{کر } \alpha \text{ رجب طہ جب (طہ + عم) فر فرطہ}$$

ر کے حدود ۰ سے ۱۲ جم طہ تک اور طہ کے ۰ سے ۳۳ تک لئے جائیں۔



۳۸ — اگر ایک دایا ہوا مستوی رقبہ ایسے ہی مستوی میں ایک ثابت نقطہ کے گرد گھومے تو دباؤ کا مرکز اپنا مقام بدلتا ہے اور رقبہ پر ایک مضغنی مرکز مقرر ہوتا ہے۔

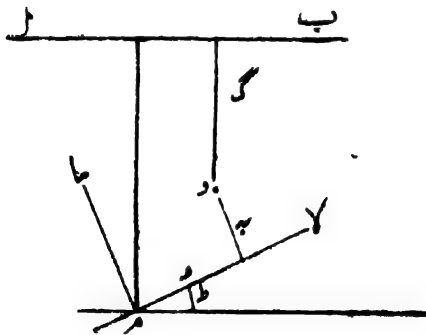
اگر مستوی رقبہ اور آزاد سطح کا خط تقاطع ا ب ہو تو ا ب سے دباؤ کے مرکز کا فاصلہ رقبہ اور انتصابی سمت کے درمیانی زاویہ پر منحصر نہیں ہوتا (دفعہ ۳۵) اس لئے ہم رقبہ کو انتصابی لے سکتے ہیں۔

(۳۸) فرض کرو کہ ثابت نقطہ و کی گہرائی گ ہے اور رقبہ کے اندر د لا، و صا ثابت ہو ہیں۔
اگر د لا کا میلان افق کے ساتھ ط ہو تو
 $d = ج ث (گ - لا جب ط - ما جم ط)$

$$\therefore لا = \frac{ا + ب جب ط + ج جم ط}{ا + د + ف جب ط + ق جم ط} = \frac{ا + ب جب ط + ج جم ط}{ا + د + ف جب ط + ق جم ط}$$

$$اور ما = \frac{ا + ب جب ط + ج جم ط}{ا + د + ف جب ط + ق جم ط}$$

جہاں ا، ب، ج وغیرہ معلومہ مستقل ہیں۔ اب ط کو سا قاط کرنے سے دباؤ کے مرکز کا طریق ایک مخروطی تراش ہوگی۔



دفعہ (۳۶) کے مسئلہ کی مدد سے بھی ہم اس نتیجہ کو اخذ کر سکتے ہیں۔
ہندسی مرکز ہر میں سے گزرنے والے صدی محوروں کو حوالے کے محور قرار دیکر اور و کے محدد (ع) پر فرض کر کے ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ دباؤ کا مرکز خط مستقیم
 $لا جب ط + ما جم ط = (گ + د جب ط + ب جب ط + ج جم ط)$

کا قطب (ضنا، عا) بلحاظ معیاری ناقص کے ہے اور مساداتوں

$$\frac{ا^۲ جب ط}{ضنا} = \frac{ب^۲ جم ط}{عا} = (گ + ع جب ط + ج جم ط)$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ ان مساداتوں سے مساداتیں

$$\left(\frac{ا}{ضنا} + ع\right) جب ط + ب جم ط = گ$$

$$\left(\frac{ب}{عا} + ج\right) جم ط + ع جب ط = گ$$

حاصل ہوتی ہیں۔

پہلے جب ط کو اور پھر جم ط کو ساقط کر کے حاصل شدہ نتیجوں کا مربع نیکر جمع کریں تو ہمیں مطلوبہ طریق کی مسادات معلوم ہو جاتی ہے جو

$$(ا^۲ ب + ع ب^۲ ضنا + ب^۲ عا) = گ^۲ (ا^۲ عا + ب^۲ ضنا)$$

ہے۔

اگر د اور ہر ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں یعنی اگر ع = ۰ اور ب = ۰ تو طریق کی مسادات ہو جائیگی

$$\frac{ضنا}{ا^۲} + \frac{عا}{ب^۲} = \frac{۱}{گ^۲}$$

۳۹ — ایک برتن میں دو قسم کے مائع میں جو ایک دوسرے کے ساتھ آمیز نہیں ہوتے۔ (۳۹) برتن کا قاعدہ مستوی ہے اور اس کے پہلو مستوی اور انتصابی ہیں۔ ایک پہلو پر حاصل دباؤ اور اس کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو۔

فرض کرو کہ اوپر کے مائع کی کثافت ρ_1 اور گہرائی h_1 گ سے اور نیچے کے مائع کے لئے متناظر تمام ρ_2 ، اور h_2 گ ہیں۔ مشترک سطح افقی مستوی ہونی چاہیے جس کے ہر نقطہ پر دباؤ P ج ٹ گ ہوگا اور مشترک سطح کے نیچے y گہرائی پر کا دباؤ ہوگا

$$P = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + \rho_3 g y$$

انتصابی پہلو کا عرض b لینے سے اس پر اوپر کے مائع کا دباؤ $P_1 = \rho_1 g h_1 b$ ج ٹ ب گ

اور بیچے کے مائع کا دباؤ = $\rho g (h + \frac{1}{2} h)$ (ٹانگ + ٹائی) ب فری
 = $\rho g (h + \frac{1}{2} h)$ (ٹانگ + ٹائی گ)
 حاصل دباؤ ان دونوں کا مجموعہ ہو گا جو

$$= \rho g \left\{ h + \frac{1}{2} h + \frac{1}{2} h + \frac{1}{2} h \right\} = \rho g (2h)$$

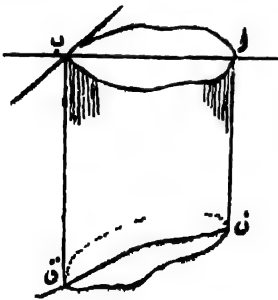
اس پیلپر کے سیالی دباؤ کا معیار (اس کے اور آزاد سطح کے خط تقاطع کے گرو)

= $\rho g (h + \frac{1}{2} h)$ (ٹانگ + ٹائی) ب فری
 اعمال تکمل کو پورا کر کے متذکرہ بالا حاصل دباؤ کے جملہ سے اسکو تقسیم کرنے سے ہمیں دباؤ کے مرکز کی گہرائی حاصل ہو جاتی ہے۔

منحنی سطحوں پر کے حاصل دباؤ

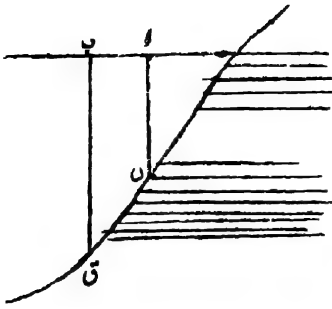
ہم — ایک متجانس دائرے کا جو جاذب الارض کے ذریعہ عمل ساکن ہے کسی سطح پر حاصل انتصابی دباؤ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ سطح Q پر ایک وزن دار مائع کا عمل ہو رہا ہے اور مائع کی آزاد سطح پر اس کا غل و ب ہے۔ مائع کی کیت Q ، مائع کے افقی دباؤ اور Q کے تعامل کے باعث متوازن ہے۔ اس تعامل کو انتصابی سمت میں تحلیل کیا جائے تو یہ جزو تحلیل Q کے وزن کے برابر ہونا چاہیے اور برعکس اس کے Q پر کا انتصابی دباؤ Q کے وزن کے برابر ہو گا اور اس کی کیت کے مرکز میں سے عمل کرے گا۔



اگر Q کو مائع اپنی طرف دبائے جس طرح کہ دوسری شکل سے ظاہر ہے تو سطح کو خارج کرو۔ اور Q کا غل پہلے کی طرح مائع کی سطح پر لو اور فرض کرو کہ فضاء Q اسی قسم کے

(۴۰)



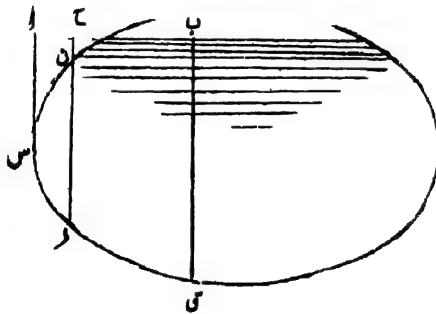
مانع سے بھری ہوئی ہے اور مانع کو نیچے سے خارج کر دیا گیا ہے۔

ن ق کے تمام نقطوں پر کے دباؤ وہی ہیں جو پہلے تھے لیکن متقابل سمتوں میں اور چونکہ اس مفروضہ صورت میں انتصابی دباؤ ا ق کے وزن کے مساوی ہے اس لئے اصلی صورت میں حاصل انتصابی دباؤ اوپر کی جانب ا ق کے وزن کے برابر ہوگا۔

اگر سطح کو مانع جزا اوپر کی طرف اور جزا نیچے کی طرف دبائے تو نقطہ ن میں سے جو سطح کے زیر بحث حصہ کا بلند ترین نقطہ ہے ایک انتصابی سطح مستوی ن رکھیں جو اور فرض کر کے مانع کی سطح پر ن س ق کا ظل راجع ہے۔

تو حاصل انتصابی دباؤ ن س ریر

$$= \text{ن س ر کے اندرونی مانع کا وزن}$$



اور ر ق پر = ج ق کے اندرونی مانع کا وزن
 اور پورا انتصابی دباؤ = ج ق کے اندرونی مانع کا وزن + ن س ر کے اندرونی مانع کا وزن۔

یہ نتیجہ گزشتہ دو صورتوں کی مدد سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے کیونکہ ن ر کا انتصابی

عامی مستویوں کے خط تماس سے دو حصوں N و S میں تقسیم کیا جاسکتا ہے جن پر کے دباؤ علی الترتیب W اور W' اور نیچے وار ہیں۔ اور چونکہ

$$N \text{ پر کا دباؤ} = \text{مائع } N \text{ کا وزن}$$

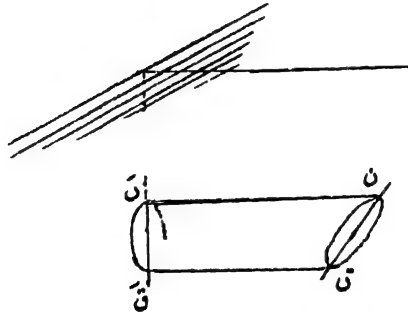
$$\text{اور } S \text{ پر کا دباؤ} = \text{مائع } S \text{ کا وزن}$$

اس لئے ان کا فرق یعنی N پر کا انتصابی دباؤ $= \text{مائع } N$ کا وزن

اسی طرح دوسری صورتوں پر غور کیا جاسکتا ہے۔
 مشاہدہ طلب ہے کہ یہ تحقیق غیر متجانس مائع (جس میں کثافت گہرائی کا ایک تفاعل ہونی چاہئے) کیونکہ مساوی دباؤ کی سطحیں مساوی کثافت کی سطحیں ہوتی ہیں) کی صورت میں بھی درست ہے بشرطیکہ قانون کثافت مائع کی مفروضہ سمت میں بھی وہی خیال کیا جائے۔

۴۱۔ سطح N پر کا حاصل افقی دباؤ کسی وی ہوئی سمت میں معلوم کرنا۔
 دی ہوئی سمت کے علی القواکم انتصابی مستوی پر N ق کا ظل کو اور فرض کرو کہ یہ

ظل N ق سے
 کمیت N ق، N ق پر کے دباؤ، N ق پر کے حاصل افقی دباؤ، اور مستوی N ق کے متوازی انتصابی مستویوں میں عمل کرنے والی قوتوں کے زیر عمل ساکن ہے۔



اس لئے N ق پر کا افقی دباؤ N ق پر کے افقی دباؤ کے مساوی ہے۔ اور یہ دباؤ ایک ہی خط مستقیم میں عمل کرتے ہیں یعنی N ق کے دباؤ کے مرکز میں سے گزرنے والے افقی خط میں سے۔

اس لئے عام طور پر کسی سطح پر حاصل دباؤ معلوم کرنے کے لئے اس پر کا انتصابی دباؤ

اور علی القواہر سمتوں میں حاصل نفی دباؤ معلوم کرو۔ یہ تین قوتیں بعض صورتوں میں ایک تنہا قوت میں تحویل ہو سکیں گی جس کے لئے شرط سکونیات کے عام طریقوں سے حاصل کیجا سکتی ہے۔

مثال :- ایک نصف کرہ متجانس مائع سے بھر دیا گیا ہے اور اس کو مرکز میں سے گزرنے والے دو علی القواہر انتصابی سمتوں سے پانچوں میں تقسیم کر دیا گیا۔ ان پانچ سنخی حصوں میں سے ایک حصہ پر کا حاصل عمل دریافت کرو۔

مرکز کو مبدا مانو احاطہ کرنے والے افقی نصف قطروں کو محور لا اور محور ما اور انتصابی نصف قطر کو محور سی فرض کرو تو لاکہ متوازی دباؤ، ربع ماوی ریک دباؤ کے مساوی ہوگا جہاں ماوی، دلا کے علی القواہریم سنخی سطح کا ظل ہے۔
اس لئے دلا کے متوازی دباؤ

$$= \text{ج ث } \frac{1}{4} \times \frac{1}{14} = \frac{1}{56} \text{ ج ث } \frac{1}{4}$$

(۴۲)

اور اس کے نقطہ عالمہ کے متحد ہیں

$$(0, \frac{3}{8}, \frac{1}{14}, \frac{1}{4}) \text{ دفعہ (۳۷) مثال (۱۱)}$$

اسی طرح دما کے متوازی دباؤ = $\frac{1}{56} \text{ ج ث } \frac{1}{4}$ حلقہ

$$(\frac{3}{8}, 0, \frac{1}{14}, \frac{1}{4})$$

پر عمل کرتا ہے۔

حاصل انتصابی دباؤ = مائع کا وزن = $\frac{1}{4} \text{ ج ث } \frac{1}{14}$ اور خطہ سستیم $\frac{1}{56} = \frac{1}{4}$ کی سمت میں عمل کرتا ہے۔
تینوں قوتوں کی سمتیں نقطہ

$$(\frac{3}{8}, \frac{1}{14}, \frac{1}{4}, \frac{1}{56})$$

میں سے گذرتی ہیں۔ اور اس لئے وہ ایک تنہا قوت

$$\frac{1}{4} \text{ ج ث } (8 + 2\pi)$$

کے مساوی ہیں جو خط مستقیم

$$\text{لا} - \frac{\pi}{8} = 1 = \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{4} = \frac{2}{\pi} (Y - \frac{\pi}{14})$$

$$\text{یعنی} \quad \text{لا} = \frac{\pi}{4} = \frac{2}{\pi} Y$$

میں مل کرتی ہے۔ یہ خط مستقیم مرکز میں سے گزرتا ہے اور ایسا ہونا بھی چاہیے کیونکہ تمام سیالی دباؤ گرہ کی سطح پر عمود وار عمل کرتے ہیں۔ یہ خط مستقیم سطح کو جس نقطہ پر قطع کرتا ہے اس کو دباؤ کا مرکز کہہ سکتے ہیں۔

۴۲۔ وزن دار مائع میں ایک ٹھوس جسم جڑا یا کلاً ڈبو گیا ہے اس کی سطح پر کا حاصل دباؤ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ٹھوس کو کھنکا لیا گیا ہے اور اس کی بجائے اسی قسم کا مائع بھر دیا گیا ہے تو اس پر کا حاصل دباؤ وہی ہو گا جو اصلی ٹھوس پر تھا۔ لیکن اس مائع کی کثیت اپنے وزن اور اس کو گھیرنے والے مائع کے دباؤ کے زیر اثر ساکن ہے۔ اس لئے حاصل دباؤ ہٹا ہے ہوئے مائع کے وزن کے برابر ہو گا اور اس کو مرکز نقل میں سے انتصابی سمت میں عمل کریگا۔

اسی طرح کے استدلال سے صریحاً یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ کسی ٹھوس جسم پر پچکدار سیال کا حاصل دباؤ جسم کے ہٹائے ہوئے پچکدار سیال کے وزن کے برابر ہوتا ہے۔

یہ نتیجہ دفعات (۴۰) اور (۴۱) کی مدد سے اس طرح بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ سطح کو مس کرتے ہوئے متوازی افقی خطوط مستقیم کھینچو جن سے ایک استوانہ بنے جس کے اندر ٹھوس گھس جائے تمناں کا مخفی سطح کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن پر کے حاصل افقی دباؤ اسطو انے کے محور کے متوازی ہیں اور ایک دوسرے کے مساوی ہیں مگر مقابل ہوتے ہیں میں عمل کرتے ہیں۔ اس لئے جسم پر کے افقی دباؤ ایک دوسرے کے اخ کو زایل کرتے ہیں اور اس لئے حاصل صاف انتصابی سمت میں عمل کرتا ہے۔ اب اس حاصل انتصابی دباؤ کو معلوم کرنے کے لئے سطح کو مس کرتے ہوئے متوازی انتصابی خطوط کھینچو تا کہ سطح دو حصوں میں تقسیم ہو جائے۔ ایک حصہ کا حاصل انتصابی دباؤ اوپر وار عمل کرتا ہے اور دوسرے حصہ

پر کا بیچے وار۔ ان دونوں کا فرق صریحاً ٹھوس کے ہٹاے ہوئے سیال کا وزن ہے۔
۴۴۔ ایک ٹھوس جسم پورے طور پر وزن دار مان میں غرق کیا گیا ہے، اگر اس کی سطح کا کچھ حصہ منحنی سطح اور بقیہ حصہ معلومہ مستوی رقبے ہوں اور اگر اس کا حجم (ح) دیا جائے تو منحنی سطح پر کا حاصل دباؤ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

کیونکہ مستوی سطحوں کا رقبہ اور ان کا محل معلوم ہے اس لئے ہم ان رقبوں پر کے حاصل افقی دباؤ لا اور حاصل انتصابی دباؤ ما معلوم کر سکتے ہیں اور چونکہ جسم کی پوری سطح پر کا دباؤ ج ث ح کے مساوی ہے اور اوپر وار انتصابی مستوی عمل کرتا ہے اس لئے اس کی منحنی سطح پر کا حاصل افقی دباؤ لا ہوگا اور حاصل انتصابی دباؤ ج ث ح۔ ما
مثال۔ داری رقبہ کو ایک ماسی حصہ کے گرد زاویہ ط میں گھمانے سے ایک ٹھوس جسم بنایا گیا ہے اس کو پانی میں اس طرح تھما گیا ہے کہ اس کا پچھلا مستوی رخ افقی اور گہرائی تک پورے۔

اس صورت میں

$$ح = \pi \times \text{لا} = ج \times \text{ث} \times \pi \times (گ - وجب ط) \text{ جب ط}$$

اور ما = ج ث π (گ - گ جسم ط + وجب ط جسم ط)
۴۴۔ کسی سطح پر ایک ایسے سیال کا حاصل دباؤ دریافت کرو جو کسی معلومہ قوتوں کے زیر عمل ماکون ہے۔

فرض کرو کہ سیال کے زیر عمل سطح ع =۔ کے نقطہ (لا، ما، ی) پر کا دباؤ د ہے جب اب دوم میں حاصل کردہ دباؤ کی طرح معلوم کیا گیا ہے۔

$$\frac{1}{ع} = \left(\frac{جف لا}{جف ما} \right) + \left(\frac{جف ع}{جف ی} \right) + \left(\frac{جف ع}{جف ی} \right)$$

تو نقطہ (لا، ما، ی) پر کے عماد کے جیوب التمام ہونگے

$$\frac{ع}{جف لا} ، \frac{ع}{جف ما} ، \frac{ع}{جف ی}$$

فرض کرو کہ اس نقطہ کو گھیرنے والے رقبہ کا عنصر صف س سے تعبیر ہوتا ہے تو محوروں کے متوازی اس عنصر پر کے دباؤ ہونگے

دع جفء لا مف س دع جفء ما مف س دع جفء ی مف س
 اس لئے اگر تلوں کے متوازی حاصل دباؤ لا ، ما اے اور حال جفت
 ل ، م ، ن ہوں تو

لا = کر دع جفء لا فرس

ما = کر دع جفء ما فرس

ے = کر دع جفء ی فرس

اور ل = کر دع (ا جفء ی - ی جفء ما) فرس

م = کر دع (ی جفء لا - لا جفء ی) فرس

ن = کر دع (لا جفء ما - ما جفء لا) فرس

سب مکمل کل سطح زیر بحث پر ہیں۔
 یہ حاصل ایک تنہا قوت کے معادل ہونگے اگر

(۴۴)

لال + ما م + ے ن =

۴۵۔۔۔ حوالے کی مستویوں کے متوازی مستوی لینے سے جسم کی سطح تین مختلف طریقوں
 سے عناصر میں تقسیم ہو سکتی ہے

مثلاً مف لا مف ما = لا پر مف س کا ظل = ع جفء ی مف س

اور اس لئے ے = کر دفر لا فرما اور اسی طرح لا = کر دفر ما فری ، اور

ما = اگر د فری فرلا

ل = اگر د (ما فرلا فرما - می فری فرلا)

= اگر د (ما فر - می - می) فرلا

فر = اگر د (می فری - لا فرلا) فرما

(ن) - اگر د (ما فر - لا فرلا) فرما

۴۴۔۔۔ اگر سیال بے مزہ، حار، تر، ہے، ابریل ماہ میں ہوا اور محوری انفعالی ہو تو وہ ایسی کہ
تساوی ہوگا، جو فرض کر کے دے رہی ہے۔

۵ = اگر د (می - می) فرما

مستوی مایہ رودی ہوئی سطح کا قطر سب سے بلند خامرہ لاکے۔ وازی اس نفل کے
دما کو تقسیم کرتا ہے۔

اسی طرح ماستوی مایہ کے قطر کے دما کے مساوی ہے۔
اگر سیال بے چمک ہو اور صرف جاذبہ کشش میں برعمل آکر ہے تو ذرات لا۔۔۔
سیال کے اس حصہ کے وزن کے مساوی ہے جو سطح میں اور سیال کی سطح پر اس کے
فل کے درمیان واقع ہے۔

۶۔۔۔ یا اگر د فرلا فرما دی ہوئی سطح کے اوپر کے سیال کا وزن ہے۔

یہ نتائج دغفات (۴، ۵، ۶) کے نتائج کے ساتھ توافقی ہیں۔

۴۴۔۔۔ اگر ایک ٹھوس جسم جبراً یا کھانسی سیال میں غرق کیا جائے۔ اور یہ سیال می ہونی
تو توں کے زیر عمل ساکن ہو تو جسم پر کا حاصل سیالی دما، آبی قوتوں کے حاصل کے مساوی
ہوگا جو ہٹائے ہوئے سیال پر عمل کرتی ہے۔

کیونکہ ہم جسم کو سیال سے نیا حد تک کے اس کی جگہ پر اسی قسم کے سیال سے پر کیا ہوا تھوڑے

کر سکتے ہیں۔ اب یہ داخل شدہ سیال ان توبوں اور گرد کے سیال کے دباؤں کے زیر عمل ساکن ہوگا۔ اور اس لئے تامل دباؤ ان دی ہوئی قوتوں کے حاصل کے مساوی ہوگا مگر سمت متقابل میں عمل کرے گا۔

جسم کی حرکت کو سال ہے بڑھتی۔ یہ تالون کثافت کی پابندی کرنی چاہیے یعنی مساوی کثافت کی سطحیں گرد کے سیال کی کثافت کی سطحوں کے ساتھ مسلسل ہونی چاہئیں۔

امثلہ

۱۔ ایک وزدار مونی رسی جس کی کثافت یا لی کی کثافت کی وجہ سے ایک سرے سے جو پانی کے باہر ہے اس طرح دکھائی گئی ہے کہ اس کا نیچہ حصہ غرق آب رہے۔ غرق شدہ حصہ کے وسط پر رسی کا تناؤ دریافت کرو۔

۲۔ ایک کھوکھلے گڑے کا نصف قطر ہے۔ اسکو پانی میں عین چھو دیا گیا ہے اس کی سطح کو ایک ایسے مستوی سے جو مرکز کے نیچے ج گہرائی پر واقع ہے دو حصوں میں تقسیم کیا گیا۔ ان حصوں پر کے حاصل انحصاری دباؤ معلوم کرو۔

۳۔ ایک برتن تر، طے نملع کی شکل کا ہے جسکا قاعدہ ن منلوں والا مستوی کثیر الاضلاع ہے اس کا اس طرح رکھا گیا کہ اس کا محور انحصانی اور اس سے نیچے وار رہے۔ اس کو سیال سے بھر دیا گیا۔ بن کا پری یا پراؤ اس پر کے مندر کے گرد حرکت کر سکتا ہے لیکن اس کو اپنی جگہ پر قائم رکھنے کے لئے ایک رسی کے ذریعہ اسکو تھاما گیا ہے جو رخ کے قاعدہ کے نقطہ وسطی اور کثیر الاضلاع کے مرکز سے باز د لگائی ہے۔ ثابت کرو کہ ہر رسی کے تباؤ اور سیال کے کل وزن میں نسبت ۱:۲ جب ۲ عم ہے چاں عم افق کے ساتھ ہر رخ کا میلان ہے۔

۴۔ ایک قبة دوم مرکز نصف دائروں سے گھرا ہوا ہے اور ان کا مشترک قطر آزاد سطح میں واقع ہے ثابت کرو کہ دباؤ کے مرکز کی گہرائی

$$\frac{3}{4} (b + b) (a + a)$$

$$(a + b + a + b)$$

ہے جہاں a ب نصف قطر ہیں۔

۵۔ ایک مربع پترے کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو جس کا ایک راس سیال کی سطح میں ہے۔

اگر اس کو اس راس کے لئے مستوی میں دکھایا جائے اور میٹر ایتھیرورسی طے مائع
میں ڈوبا رہے تو اس کے دباؤ کے مرکز کا طریق معلوم کرو۔

۱۔ ایک ناقص میٹر کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو جو بانی میں عین ڈوبا ہوا ہے۔ اگر اس کو اپنے
انتصابی ستوی میں اس طرح دکھایا جائے کہ ہمیشہ بانی میں غرق رہے تو اس کے محوروں کے
اوسط دباؤ کے مرکز کا طریق معلوم کرو۔

۲۔ ایک مکعب صندوق بانی میں ڈوبا گیا ہے اس کا دیگر وزن دار اور مکعب بیٹھنے
والا ہے اور اس کو جکڑنے کے لئے زبردستی ڈوبا کر دیا گیا ہے۔ ماری ماری سے اس کو
زائد کے مرکز سے کے گرد اتنے اویہ میں دکھایا گیا ہے کہ بانی میں خارج ہونے لگے۔ ان
زادیوں کے خاصوں لا متناہی کرو۔

۳۔ ہم عمود دائروں کے ایک نظام کو بانی میں اس طے ڈوبا گیا ہے کہ مرکزوں والا حصہ ایک
یونیورسٹی گہرائی پر رہے۔ ثابت کرو کہ یہ مرکزوں کے راسوں کے راسوں کے
مرکز ایک مکانی واقع ہوتے ہیں۔

۴۔ ایک نیم قطع ناقص (محاورہ ۱ اور ۲) کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو جو ایسے قطر سے محدود
ہے جس کا میلان محور اعظم کے ساتھ $\frac{\pi}{4}$ ہے۔ ناقص کی سطح امتدادی ہے اور وسط سائرانی سطح
میں واقع ہے۔

۵۔ ایک نیم قطع ناقص اپنے محور اصغر سے محدود ہے اور ایسے مائع میں عین ڈوبا ہوا ہے
جس کی کثافت ایسے ہلکی ہے جیسے گہرائی۔ اگر محور اصغر مائع کی سطح میں واقع ہو تو خروج امرار
دراخت کرو کہ اس کے دباؤ کا مرکز کون سا ہے۔

۶۔ ایک مربع بیٹر اب جہد بانی میں ڈوبا ہوا ہے اس کا مکعب اب بانی کی سطح میں واقع
ہے۔ نقطہ ب سے جہد کے نقطہ تک خط مستقیم ب سے ایسا کھینچو کہ دووں حصوں
پر کے دباؤ سادہ ہوں۔

ایسی صورت میں ثابت کرو کہ

دباؤ کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ: مربع کا ضلع $\cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} : 2$
۱۲۔ ایک نصف دائرہ جس سے اس کا قطر مائع کی سطح میں ہے ایک دائرہ کا ٹکڑا لیا گیا ہے
اس دائرہ کا قطر نصف دائرہ کا انتصابی نصف قطر ہے۔ بتیہ حصے کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو۔

۴۶

۱۳۔ ایک نصف دائری انتصابی بیڑ پر سی طرح پانی میں ڈوبا ہوا ہے اس کے محدود کرنے والے قطر کا سرا ۲ پانی کی سطح میں ہے اور پانی کی سطح کے ساتھ اس قطر کا میلان عد ہے۔ اگر دباؤ کا مرکز ہوا اور قطر ۲ سے کا درمیانی را دیہہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس ط} = \frac{۱۶ + ۲۳}{۲۱۵ + ۱۶} \text{مس عد}$$

۱۴۔ اگر ایک مثلث کے راسوں کی گہرائیاں مانع کی سطح کے نیچے 'ا' ب' ج ہوں تو ثابت کرو کہ مرکز ثقل کے نیچے دباؤ کے مرکز کی گہرائی ہوگی

$$\frac{(ب - ج)^۲ + (ج - ا)^۲ + (ا - ب)^۲}{۱۲}$$

۱۵۔ ایک مستوی رقبہ جو ایک سیال میں ڈوبا ہوا ہے اپنے متوازی اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کا مرکز ثقل ہمیشہ ایک ہی انصبابی خط میں رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ (۱) دباؤ کے مرکز کا طرہ تی قطعہ زاہستے جس کا ایک متقارب دیا ہوا انصبابی خط ہے اور (۲) اگر مختلف محلوں میں اس کے مرکز ثقل کی گہرائیاں ۱، ۱ + ھ، ۱ + ھ + ۱، ۱ + ھ + ۱ + ھ اور ان کے متناظر دباؤ کے مرکز کی گہرائیاں ۱، ۱ + ھ، ۱ + ھ + ۱، ۱ + ھ + ۱ + ھ ہوں تو

$$\begin{vmatrix} ک & ھ & ھ & (ک - ھ) \\ ک & ھ & ھ & (ک - ھ) \\ ک & ھ & ھ & (ک - ھ) \end{vmatrix} = ۰$$

۱۶۔ مکانی کے ایک قطعہ کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو جو وتر خاص سے محدود ہے اور وتر خاص کے ایک سر پر کا ماس مانع کی سطح میں ہے۔

اگر مانع کی سطح اوپر چڑھے اور مکانی ساکن رہے تو ثابت کرو کہ دباؤ کا مرکز ایک خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے۔

۱۷۔ ایک مخروط پانی میں پوری طرح غرق ہے۔ اس کے قاعدہ کے مرکز کی گہرائی دی گئی ہے۔ اگر اس کی محدد سطح بر کے حاصل دباؤ ۱ د، ۱ د، ۱ د ہوں جبکہ انہی کے ساتھ اس کے محور کے میلان کے بموجب بالترتیب س، س، س ہیں تو ثابت کرو کہ

$$ڈ(س - س) + ڈ(ا س - س) + ڈ(س - س) = ۰$$

۱۸۔ — محوروں اور منحنی مالا + مالا = مالا کے درمیانی رقبہ کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو۔ محاور علی القواہم ہیں اور ایک محور سیال کی سطح میں واقع ہے۔

۱۹۔ — مانع کی کچھ مقدار و متوازی مستویوں کے درمیان ہے۔ یہ مانع ایک مرکزی قوت کے زیر عمل ہے جو ایسے بدلتی ہے جیسے خاملہ اگر مستویوں کے اُن حصوں کے رقبے جہاں سیال مس کرتا ہے 'ب' ہوں تو ثابت کر کہ اس حصوں پر سے 'باؤں' میں نسبت 'ا' : 'ب' ہے۔

۲۰۔ — ایک ٹھوس کرہ ایک افقی مستوی پر ٹکنا جو اپنے اوپر ایک مانع میں عین دوبا ہوا ہے۔ انصافی نقطہ میں سے گزرنے والے، وعلی القواہم مستویوں سے اس کرہ کو تقسیم کیا گیا ہے۔ اگر کرہ کی مختلف ثلث اور سیال کی یہ موتو ثابت کر کہ یہ حصے ایک دوسرے سے جدا نہیں ہونگے

لشکر طیکہ ثلث

۲۱۔ — زائد کا ایک متقارب سیال کی سطح میں ہے۔ اس رقبہ کے دباؤ کے مرکز کی گہرائی معلوم کرو جو دو بے ہوئے متقارب استعمی، اور زائد کی سطح میں کے وفاق خطوط مستقیم سے خود دو ہے۔

۲۲۔ — ایک مخروط بانی میں اس طرح دوبا ہوا ہے کہ اس کے قاعدہ کا مرکزیانی کی سطح کے نیچے اس کے ارتفاع کے $\frac{1}{2}$ گہرائی پر واقع ہے۔ اسی قاعدہ اور ارتفاع کا ایک مکانی بنا بھی اس طرح غرق ہے کہ اس کے قاعدہ کے مرکز کی گہرائی سطح کے نیچے وہی ہے جو مخروط کا قاعدہ کے مرکز کی ہے۔ نیز انصافی سمت کے ساتھ اس کے محور کا میلان بھی وہی و مخروط کے محور کا ہے۔ یہ میلان کیا ہونا چاہیئے کہ ان دونوں محبوسوں کی محبہ سطحوں پر کے دباؤ مساوی ہوں۔

۲۳۔ — ایک بند اسطوانہ مانع سے تقریباً بھرا ہوا ہے اور اسے ایک تلویہی خط کے گرد جزا انصافی ہے۔ یکساں رفتار سے گھوم رہا ہے۔ اس کی منحنی سطح پر کچھ گھل دباؤ معلوم کرو۔

اس کے اوپر کے سرے پر جو دباؤ ہے اس کا نقطہ معلوم کرو۔

۲۴۔ — ثابت کر کہ جو رقبہ منحنی (۸) جہم طہ = ب کے متقارب اور اس کی توس کے درمیان گھرا ہوا ہے اس کے دباؤ کے مرکز کی گہرائی ہے

$$\frac{1}{4} \times \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16}$$

جہاں متقارب سیال کی سطح میں ہے اور منحنی کا مستوی انصافی ہے۔

۲۵۔ ایک مخروطی سطح سے بھر دیا گیا ہے۔ اس کا ڈیڑھ وزن دار شیک بیٹھنے والا ہے اور ایک قبضہ کے گرد حرکت کر رہا ہے۔ اس مخروط کو قبضہ میں سے گزرنے والے محور کی خط کے گرد (جو انتہائی ہے) ایک اس دائرے سے گھمایا گیا ہے۔ بڑی سے بڑی زاویہ رفتار معلوم کرو کہ دائرہ کی شکل کی طرح ہے۔

۲۶۔ مخروطی خول کا ایک حصہ ایک مستوی سطح پر تراش لیا گیا ہے اور بقیہ حصہ کو ایک افقی مستوی سطح پر رکھا گیا ہے کہ درجہ تراش مستوی کو کس کرے۔ پھر دو بانہ ترین نقطہ پر کے ایک محور سے سواری کے، لید پانی سے بھر دیا گیا ہے۔ مخروطی خول کا بڑے سے بڑا حصہ دریافت کرو جو ثابت لیا جاسکے اس طرح کی پانی باہر نکل چرنے نہ پائے خواہ خول کتنا ہی بڑا ہو۔ ایسی صورت میں ثابت کرو کہ حول پرکھ پورا دائرہ کے وزن کے ساتھ ۱:۲ کی نسبت رکھتا ہے۔

۲۷۔ ایک غرق شدہ مستوی رقبہ ایسا مستوی میں کے ایک خط مستقیم کے گرد گھومتا تو ثابت کرو کہ دائرہ کا مرکز اس مستوی میں ایک خط مستقیم پر گزرتا ہے۔

۲۸۔ ایک گولہ کا قطر ۱۲ ہے اس کے ذریعہ اور انتہائی ہیں۔ اس کے گرد ایک وزن دار رقبہ ہے جس کا حجم $\frac{1}{2} \pi r^2 h$ ہے۔ $\{1 - \frac{1}{2} \pi r^2 h\}$ ہے۔ دائرہ پر ایک ایسی قوت عمل کرتی ہے کہ گولہ کے مرکز کو مرکز سے جڑتی ہے۔ یہ جیت اس مرکز سے فاصلہ حاصل ہے اور قوت کی مقدار ہے۔ آزاد سطح کی شکل کی کسی ذریعہ پر کیا جائے تو وہ ایک انتہائی نوعیت سے مستوی ہے۔ ایک افقی خط مستقیم کے گرد حرکت کر کے ثابت کرو کہ یہ رقبہ ساکن ہوگا بشرطیکہ اس سطح کے زیریں ہمارے سے چھوڑا جائے۔

۲۹۔ ایک گولہ کی سطح پر ایک دائرہ میں سے گزرنے والے مستوی سے تراشا گیا ہے جو اس کے محور پر عملی افواج ہے۔ یہ سطح کی طرح اپنے ذریعہ پر اس طرح اس کے دمی ہوئی گولی پر ہے اور اس کا انتہائی سمت سے دیا جاتا ہے۔ اس کی سطح پر کے حاصل ہوتی ہے۔ اور اس کی مقدار معلوم کرو۔

۳۰۔ ایک مکعبی رقبہ دو خاص سمتوں پر ہے۔ اس کو دو خاص کے گرد زاویہ ط میں گھما کر ایک محور میں بنایا گیا ہے اور اس محور کو پانی میں اس طرح تھا گیا ہے کہ یہ عین غرق ہے اور اس کا چلا مستوی سطح افقی رہے۔ اگر منحنی سطح پر کے حاصل دباؤ کا میلان افق کے

ساتھ نہ ہونو ثابت کر دو کہ

۳ جب ۱ ط ۱ س نہ = ۵ جب ط - ۲ جب ط جھڑ - ۲ ط

۳۱ — سیال کی کچیا یہ ایک محوئے گردانہ فی توازن میں لگھوم رہی ہے۔ سیال تانوں قدرت کی بوجب کشش کرنا ہے۔ اس میں ایک چھوٹا ذرہ داخل کر، ایک یا نہ ۱۱ اس کو بھی رقا، یہ بھی ہے جو کہ اس جگہ کے سیال - ذرہ کی ہے۔ کہا اپنی جگہ میں بہہ اور کی طرف آئے گا یا اس سے پرے ہٹے گا۔

۳۲ — سیال کی ایک نہ محدود کثرت میں ۱۰ ذروں ۱۰ مل گئے ہیں۔ سیال کی مختلف کثرت ہے اور اس کا ہر حصہ - دوسرے حصہ کہ قانون قدرت کے وجہ جذب کرنا ہے تو ان کے اندر وہی دہیر وہی نصف قطر علی السبب ایک با او - ایک با ہیں اور ان کی کثافتیں تباہ ہیں۔ نخل بھی ایک دوسرے کے اور - سیال کو قانون قدرت کے کہ جب جذب کرتے ہیں - نخل پر کی حامل قوت معلوم کر دو اور ثابت کر دو کہ اس صورتوں میں بہت توتہ واقعی ہوگی۔

۳۳ — ایک دیا ہوا رقبہ اتنا باریک و نازک وزن دار ہاں میں مرق ہے اس رقبہ کو قاعدہ مان کر ایک مخروط بنایا گیا ہے جو کلینا مان میں مرق سے اس کا باقی معلوم کرو جبکہ سطح پر کا حامل دباؤ مستقل ہو اور ثابت کر دو کہ دباؤ غیر متغیر رہے گا اگر مخروط کو اس افقی خطہ کے گرد گھمایا جاوے جو قاعدہ کے مرکز ثقل میں سے گزرتا ہے اور قاعدہ کے مستوی پر عمود وار ہے۔

۳۴ — ایک مخروطی برتن کو جس کا محور انفضائی اور اس بننے وار سبب حر میں سے گزرنے والے ایک مستوی سے دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے ان حصوں کو اس سے ایک ایک قبضہ اور ایک ڈوری کے ذریعہ جو برتن کے کنارہ کا قطر ہے اور فاصلہ مستوی پر عمود وار ہے جدا کرنے سے دو کا گیا ہے۔ اگر برتن کو پانی سے بھرا جائے تو رسی کے تناؤ کا پانی کے وزن کے ساتھ متبادل کر دو۔

۳۵ — ایک کھوکھلے مخروط کو جسکی چوٹی کھلی ہے پانی سے جزایا گیا ہے اس کے محور میں سے گزرنے والے دو مستویوں سے (جن کا درمیان زاویہ دیا گیا ہے) مخروط کے ایک طرف جو سطح کا حصہ کٹا ہے اس پر کا حامل دباؤ اور اس کا خط عمل معلوم کر دو۔

اگر زاویہ اس قائمہ ہر توثابت کر دو کہ یہ خط مخروط کی چوٹی سے گزرتا ہے۔ کہ مرکز سے ہے۔
۳۶ — ایک برتن ناقصی کافی نسا کی شکل کہ سب سے اس کا محور امتداد پانی سے ہے۔ اس کو ہم دیکھتے

منطبق ہو جائے تو ثابت کر دو کہ

ف : ق : ر :: ۳ : ۲ : ۱ - (م + ن) : ۳ : م - (ن + ل) : ۳ : ن - (ل + م) : ۴ : م — ایک کعب صندوق کے ضلع کا طول وہ ہے اور اس کے وزن دار ڈھکن کا وزن وہ ہے جو ایک کنارے کے گرد حرکت کر سکتا ہے۔ صندوق کو پانی سے بھر دیا گیا ہے اور اس کنارہ کے ایک سرے میں سے گزرنے والے قطر کے ذریعہ اس کو انتصابی طور پر رکھا گیا ہے اب اگر اس کو یکساں زاوی رفتار سے گھمایا جائے تو ثابت کر دو کہ

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right)$$

سے کم نہ ہونا چاہیے تاکہ پانی گرنے جائے جہاں و صندوق کے اندرونی پانی کا وزن ہے — ۴۸ — ایک ناقص ناکو مرکز میں سے گزرنے والے کسی مستوی سے تراش کر اس کی منحنی سطح اور مستوی تراش سے ایک بند استوار برتن تیار کیا گیا ہے۔ برتن کو پانی سے عین بھر کر ایک افقی میز پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ مستوی قاعدہ میز پر رکھا رہے۔ ثابت کر دو کہ منحنی سطح پر کا حال دباؤ ایک انتصابی قوت کے مساوی ہے جو پانی کے نصف وزن کے مساوی ہے اور جس کا خط عمل مستوی قاعدہ کو مرکز سے $\frac{1}{2}$ (۱۸۰°) فاصلہ پر قطع کرتا ہے جہاں ر قاعدہ کا مزون نصف دتر اور ع مرکز سے افقی مای مستوی پر عمود ہے۔

۴۹ — ایک چھوٹا محسوس جسم ایک سیال میں ساکن رکھا گیا ہے جس میں کسی نقطہ پر کا دباؤ قائم محدود لا، مای کا ایک دبا ہوا تقاقل ہے۔ ثابت کر دو کہ اس جفت کے اجزائے ترکیبی جو جسم کو اس کے مرکز ثقل کے گرد گھمانے کا میلان رکھتا ہے

$$(ج - ب) \frac{f_2}{f_1} - \left(\frac{f_2}{f_1} - \frac{f_2}{f_1} \right) \left(\frac{f_2}{f_1} \right) \frac{f_2}{f_1}$$

$$+ \frac{f_2}{f_1}$$

اور اسی طرح کے دو اور جملے ہیں جہاں (ب، ج، د، ع، ف) مرکز ثقل میں سے گزرنے والے محاورے کے لحاظ سے جسم کے حجم کے جمودی میا روں اور جمود کے محال روں کو تعبیر کرتے ہیں۔

۵۰۔ ایک استوار کردہ نول کا نصف قطر ہے۔ اس میگیس کی کیفیت تک ہے جس میں دباؤ کثافت کا لگنا ہے کیس ایک ثابت بیرونی نقطہ سے اس کا فاصلہ کر کے ف ہے۔
ایسی قوت سے دفع ہوتی ہے جو دباؤ کا لگائی کیفیت $\frac{1}{2}$ کے مساوی ہے۔

ثابت کر کے نول پر کیس کا حاصل دباؤ ہے

$$\frac{\text{لک}}{\text{فنا}} \times \frac{8 \text{ فٹ}^2 - 2}{2 \text{ فٹ}^2 + 2}$$

۵۱۔ پانی سے بھر ہوا ایک ظرف ناقص نما (محاورہ، ب، ح) کے آٹھویں حصہ کی شکل کا ہے جو تین صدی ستویں سے محمد دہے۔ محور انہ صالی ہے اور گروہائی کا دباؤ نظر انداز ہو سکتا ہے۔

(۵۰)

نماست کر کے مستحق سطح پر کا حاصل سیالی دباؤ ایک ایسی قوت ہے جس کی شدت ہے

$$\frac{1}{2} \left(\text{ب}^2 + \text{ح}^2 + \frac{1}{2} \text{ب}^2 + \frac{1}{2} \text{ح}^2 \right)$$

۵۲۔ ایک گھوکھانا ناقص نما پانی سے بھر دیا گیا ہے اور اس طرح رکھا گیا کہ محور افقی کے ساتھ زاویہ عدنائے اور محور ج افقی ہے۔ ثابت کر کے محور د میں سے گزرنے والے اندہالی ستویں کے بظرف کی مستحق سطح پر کا سیالی دباؤ ایک رینج (Wrench) کے مساوی ہے جس کی گھائی ہے

$$\frac{1}{2} \text{ب}^2$$

م ح جب تک حجم عد

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \left(\text{ب}^2 + \text{ح}^2 + \frac{1}{2} \text{ب}^2 + \frac{1}{2} \text{ح}^2 \right)$$

۵۳۔ ایک مثلث ایک مانع میں غرق ہے جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی۔ اس مثلث کے اس مانع کی سطح کے نیچے غدا، ب، ج فاصلوں پر واقع ہیں۔ ثابت کر کے دباؤ کے مرکز کی گہرائی ہے

$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \left(\text{ب}^2 + \text{ح}^2 + \frac{1}{2} \text{ب}^2 + \frac{1}{2} \text{ح}^2 \right) + \frac{1}{2} \text{ب}^2 + \frac{1}{2} \text{ح}^2$$

۵۴۔ ایک مستوی رقبہ ایک وزن دار غیر متجانس سیال میں کلیتا غرق ہے اور ایک ایسے

افنی ناہت محور کے گرد گھومتا ہے جو گ گہرائی پر ہے اور مستوی پر نمودار ہے۔ اگر گہرائی پر سال کی کثافت مہ می کے مساوی ہو اور اگر محور اور مستوی کے نقطہ تقاطع میں سے گزرنے والے دو علی الاقوام محاوروں میں سے ہر ایک کے لحاظ سے مستوی رقبہ متشاکل ہو تو ثابت کرو کہ دباؤ کے مرکز کا طریق نقصان میں ایک قطع ناقص ہے جس کے مرکز کی گہرائی ہے

گ (۱) - ک (۲) ک (۲)

۲ گ - (۱) + ک (۲) (۲) + ک (۲)

جہاں متشاکل محوروں کے لحاظ سے رقبہ کے گردش کے نصف قطر ک (۲) ہیں اور گہرائی کا دباؤ ہے

۱ رجب مہ (۱) - گ (۲)

۵۔ ثابت کرو کہ کسی غرق آب مستوی رقبہ کا دباؤ ایک قوت میں جو رقبہ کے مرکز ہندسی پر عمل کرتی ہے اور ایک جہت میں جو رقبہ کے مستوی میں ایک محور کے گرد ہے تحلیل ہو سکتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اس جہت کا محور اس ماس پر نمودار ہے جو مرکز ہندسی پر کے معیار می ناقص کے افنی قطر کے سرے پر بھیجا گیا ہے۔



باب چہارم

تیرنے والے اجسام کا توازن

۴۸ — تیرنے والے جسم کے توازن کی شرطیں معلوم کرنا۔

ہم یہ فرض کریں گے کہ سیال مہرٹ جاؤ۔ ارض کے زیر عمل ساکن بنے اور جسم بھی صرف اسی قوت کے زیر اثر سیال میں آزادانہ تیر رہا ہے۔ اس طرح جسم پر عمل کرنے والی قوتیں مہرٹ اس کا وزن اور گردے سیال کا دباؤ ہو گا۔ اس لئے توازن کے اقامت کے لئے حامل سیالی دباؤ جسم کے وزن کے مساوی ہو گا اور انتصابی سمت میں عمل کرے گا۔

اب ہمیں یہ معلوم ہے کہ جزا یا کُل غرق شدہ ٹھوس کی سطح پر کا حاصل سیالی دباؤ ہٹا ہے ہوئے سیال کے وزن کے مساوی ہوتا ہے اور اس کی کمیت کے مرکز میں سے گزرنے والے انتصابی خط میں عمل کرتا ہے۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جسم کا وزن ہٹائے ہوئے سیال کے وزن کے مساوی ہونا چاہیئے اور یہ کہ جسم اور ہٹا ہے ہوئے سیال کی کمیتوں کے مرکز ایک ہی انتصابی خط میں واقع ہونے چاہئیں۔

یہ شرطیں توازن کے لئے ضروری اور کافی ہیں خواہ سیال جس میں جسم تیر رہا ہے کسی نوعیت کا ہو۔ اگر سیال غیر متجانس ہے تو ہٹائے ہوئے سیال کو اس طرح خیال کرنا ہو گا کہ وہ بھی جسم کو گھیرنے والے سیال کے قانون کثافت کی پابندی کرتا ہے بالفاظ دیگر اس میں ایسے طبقات درج کر کے ہو گئے جو گرد کے افقی طبقات کے ساتھ مسلسل ہوں نیز اسی قسم کے اور اسی کثافت کے ہوں۔

مثلاً اگر ایک ٹھوس جسم جزا غرق شدہ یا پانی میں تیر رہا ہو تو اس کا وزن ہٹائے ہوئے پانی کے وزن اور ہٹا ہی ہوئی ہو اس کے وزن کے مجموعہ کے مساوی ہو گا۔ اور اگر ہوا کو خارج کر دیا جائے یا اس کے دباؤ کو کثافت یا پٹش کی تخفیف سے کم کر دیا جائے

(۵۲)

تو ٹھوس کا کچھ حجم پانی میں اور ڈوب جائے گا جو اس کے وزن اور پانی اور ہوا کی کثافتوں پر منحصر ہوگا۔ اس کی مزید تشریح یوں ہو سکتی ہے کہ ہوا کا دباؤ پانی کی سطح پر بہت کم ہے کسی اور کے نقطہ پر کے دباؤ کے زیادہ ہے اور ہوا کا یہ سطحی دباؤ پانی کے ذریعہ تیرنے والے جسم کے غرق شدہ حصہ پر منتقل ہو جاتا ہے جس کا یہ نتیجہ ہوتا ہے کہ اس پر ہوا کا اوپر وار دباؤ اس کے نیچے وار دباؤ سے بڑا ہوتا ہے۔

۹م۔ ہم چند خاص صورتیں لیکر شرائط بالا کے اطلاق کی توضیح کریں گے۔

مثال (۱) ٹھوس مکانی نا کا ایک حصہ جس کا ارتفاع دیا گیا ہے، ایک متجانس مائع میں سطح تیر رہا ہے کہ محور امتصائی اور اس نیچے کی طرف سے اس کے توازن کا محل معلوم کرو۔

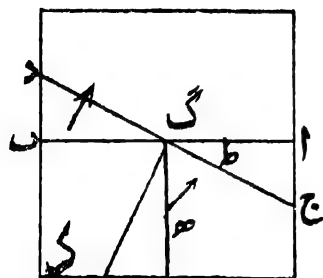
نکوی مکانی اس کے وتر خاص کو ۹، ارتفاع کو ۸، اور اس کی گہرائی کو ۷ سے تعبیر کیا جائے تو پورے ٹھوس اور غرق شدہ حصہ کے حجم کی ترتیب ۸۲، ۷۲ اور ۹۲ لا ہونگے۔ اور اگر ٹھوس اور مائع کی کثافتیں لکھا شدہ ہوں تو توازن کی ایک شرط

$$۸۲ \times ۸ = ۷۲ \times ۷$$

$$۸ = ۷$$

جس سے عرق شدہ حصہ کا تعین ہو جاتا ہے۔ دوسری شرط صریحاً پوری ہوتی ہے۔ مثال (۲) ایک مربع پتر ایک مائع میں جس کی کثافت اسکی کثافت کا نصف ہے انتظاماً تیر رہا ہے۔ اس کے توازن کے محل معلوم کرو۔

شرائط توازن صریحاً پوری ہوتی ہیں اگر پترے کا نصف حصہ مائع میں اس طرح عرق ہو کہ وتر امتصابی رہے یا دو اضلاع امتصابی ہوں۔



اب یہ معلوم کرنے کے لئے کہ کوئی اور کل بھی توازن کا محل ہو سکتا ہے یا نہیں۔ فرض کرو کہ پتر اس طرح تھا گویا ہے کہ خط مشرق دگ ج مائع کی سطح میں ہے۔ اس صورت میں پہلی شرط پوری ہوتی ہے۔ لیکن اگر ج گ ۱ = ط اور مربع کا ضلع ۲ = ط نقطہ گ کے گویا دباؤ کا معیار جو

مستطیل اسی کے معیار اور مثلث گنگ د کے دو جہ معیار کے فرق کے مساوی ہوتے

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \text{جب ط} - \frac{1}{3} \times \text{مسا ط} = \frac{1}{3} \times \text{مسا ط} + \frac{1}{3} \times \text{مسا ط}$$

یا جب ط (۱- مسا ط)

کے متناسب ہوگا اور یہ اسی صورت میں معدوم ہو سکتا ہے جبکہ ط = ۱ یا ۰

اس لئے توازن کا کوئی دوسرا عمل نہیں ہو سکتا۔

مثال ۳ - ایک مثلثی فنڈور اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کے کنارے افقی ہیں۔ اس کے توازن کے عمل دریافت کرو۔

دریغ کرو کہ مثلث دہل منسور کی دو تراستیں ہیں جو اس کے مرکز ثقل سے گزرنے والے

انسانی سستی سے پیدا ہوتی ہے۔

نق میراؤ کا خطا اور ہٹا ہے

مائع کا مرکز ثقل ہے۔ توازن کی صورت میں

تجربہ ان فی : رقبہ ا ب ج : نشو

کی کثافت : مائع کی کثافت

اور اس لئے ن فی کے تمام محلول

کے لئے ا ب ق مستقل ہے۔ اس لئے

ن ق ہمیشہ اپنے وسطی نقطہ پر ایک ایسے

زائد کو مس کرتا ہے جس کے تغارب ا ب

اور ا ج ہیں۔

نیز ہٹ، ن ق برعمود وار ہونا چاہیے اور چونکہ

$$ا : ہ : می = ا : ہ : ن ق$$

اس لئے ن ق، ن ق برعمود وار ہوگا۔ یعنی ن ق ہٹ کے نقطہ ی پر کا

عماد ہے۔ اس لئے اب یہ مسئلہ ن ق سے منحنی پر عماد ٹھننے کے مسئلہ میں توہل ہو جاتا ہے

فرض کرو کہ عماد ا ب، ا ج کے حوالہ سے منحنی کی مساوات ہے

$$لا ا = ح$$

اور زاویہ ب ا ج = طہ' اب = ۱۲' ا ج = ۲ ب
 نیز فرض کرو کہ نقطہ سے کے محدود (لا) ہیں۔ ۱۰ ب نقطہ کے محدود ہیں اور
 نقطہ سے پر کے عماد کی مساوات ہے

$$\text{ع} - \text{ما} = \frac{\text{ما جم طہ} - \text{لا}}{\text{لا جم طہ} - \text{ما}} (\text{فنا} - \text{لا})$$

اور اگر یہ نقطہ میں سے گزرے جس کے محدود 'ب ہیں تو

$$(\text{ب} - \text{ما}) (\text{لا جم طہ} - \text{ما}) = (\text{ا} - \text{لا}) (\text{ما جم طہ} - \text{لا})$$

$$\text{با} - \text{لا} - (\text{ا} + \text{ب جم طہ}) \text{لا} = \text{ما} - (\text{ا جم طہ} + \text{ب}) \text{ما} \quad (\text{ب} - \text{ا})$$

مساواتیں (ع) اور (ب) رائہ کے تمام نقطوں کا انجین کرتی ہیں جن پر کے محاس
 یہ اڈ کے خطوط ہو سکتے ہیں۔

نیر مساوات (ج) اب' ا ج کے متوازی مردوج قطروں کے حوالہ سے
 ایک قائمہ رائہ کی مساوات ہے۔ اس سے ان دونوں زائندوں کے تقاطع نقطہ سے کے
 محل میں۔

مساوات

$$\text{لا} - (\text{ا} + \text{ب جم طہ}) \text{لا} = (\text{ا جم طہ} + \text{ب}) \text{ا} - \text{ج} =$$

سے لا مساوی ہو سکتا ہے اس مساوات میں صرف ایک اصل معنی ہے اور ایک یا تین
 مثبت اعلیں ہیں۔ اس لئے توارس کے محل تین ہو سکتے ہیں یا صرف ایک۔

اگ منشور اور رائے کی کثافتیں نہ اور ف ہوں تو چونکہ ترقبہ ن ا ق

$$= \frac{1}{4} \text{ا} \times \text{ا ق جب طہ} = ۲ \text{لا} \text{ما جب طہ} = ۲ \text{ج} \text{ما جب طہ}$$

$$\text{اس لئے} \quad ۲ \text{ث ج جب طہ} = ۲ \times \text{ث} \times \text{ا} \times \text{ب جب طہ}$$

$$\text{یا} \quad \text{ث ج} - \text{ث} \times \text{ا} \times \text{ب}$$

جس سے ج معین ہو جاتا ہے۔

فرض کرو کہ منشور متساوی الساقین ہے تو $\text{ا} = \text{ب}$ رکھنے سے لا کو متعین کرنے کی

کی مسادات ہو جاتی ہے

$$لا - ج = ۱ (۱ + جم ط) (لا - ج) = ۱$$

اسکے ہمیں لا = ج ملتا ہے جس سے ما = ج حاصل ہوتا ہے اور ب ج افقی قرار پاتا ہے جو صریحاً توازن کا محل ہے اور نمبر

$$لا = \frac{۱}{۲} (۱ + جم ط) \pm \left\{ \frac{۱}{۲} (۱ + جم ط) - ج \right\}$$

$$= ۱ جم ط \pm (لا - ج) = ۱$$

اس لئے مساوی الساقین منشور کے توازن کا محل صرف ایک ہوگا تا آنکہ

$$۱ جم ط < ج$$

اور چونکہ ت ج = ۱ - لا اس لئے یہ

$$جم ط < \frac{۱}{۲}$$

کے مثل ہے۔

مثال ۴۔ دی ہوئی شکل اور وزن کے غبارہ کے توازن کا محل معلوم کرو جبکہ کردہ ہوائی کے مختلف ارتفاعوں پر تپس کے تغیرات نظر انداز کئے جائیں۔

تپس مستقل ہو تو ہی ارتفاع یہ ہوا کا دباؤ = ۱۱ تو تپس اور اس کی کثافت

$$= \frac{۱۱}{۲} \text{ تو } ج = ۱۱ \text{ جہاں } ۱۱ \text{ اس مستوی پر کے ہوائی دباؤ کو تعبیر کرتا ہے جہاں سے ارتفاع}$$

کی یہاں سے ہوئی ہے۔

بٹائی ہوئی ہوا متغیر کثافت کے طبقات کے سلسلوں پر مشتمل ہوگی اور اگر غبارہ کے

زیر ترین نقطہ کا ارتفاع ی ہو اور اس نقطہ سے غبارہ کی کسی افقی تراز (لا) کا فاصلہ

لا ہو اور ف غبارہ کا ارتفاع ہو تو بٹائی ہوئی ہوا کے ایک طبقہ کا وزن ہوگا

$$\frac{۱۱}{۲} \text{ فو } \frac{ج (۱ + لا)}{ک} \text{ لا صف لا}$$

$$\begin{aligned} \text{اور ہٹانی ہا کا کل وزن} &= \text{ج (ی + لا)} \\ &= \text{کر جی} \text{ و } \text{ک} \text{ لا فلا} \\ &= \text{جی} \text{ و } \text{کر جی} \text{ لا فلا} \end{aligned}$$

اب چونکہ غباء کی شکل دیکھی ہے اس لئے لا کا ایک معلومہ تغافل ہے اور اگر
 عبادہ اور اس کی اندرونی گیس پر وزن دہنوار قسائی کا حصہ و لو ہٹانی ہر لی ہوا کے
 تل وزن کے مساوی رہتے ہے جو ہٹا ہے
 ۵۔ اہم خاص اس کو جس جسم کا غرق شدہ و اب مالت تیرا ہے جس کی کثافت ایک
 ہر ہے یہ تہذیبی جسم کی کثافت کے مرکز کی گہرائی معلوم کر
 فرض کرو کہ جسم کے بلند ترین اور زیر ترین نقاط کی گہرائیاں ۱۰ ہر ہیں اور
 گہرائی پر اس کی افقی تراش کو قریب سے ہے اور اس گہرائی پر مانع کی کثافت مہی ہے
 تو ہٹا ہے ہونے مانع کا وزن = کر جی مہی سے مہی

فرض کرو کہ جسم کے حجم (ح) کے مرکز ہندسی کی گہرائی مہی ہے
 ح مہی = کر جی مہی

اس لئے مہا سے مہی مانع کا وزن = ج مہی ح اور اگر جسم کی کثافت ہٹا ہو تو
 اس کا وزن = ج ہٹا ح اس لئے ہٹا = مہی مہی جسم کی ایسے محل میں تیرا
 ہے کہ اس کے حجم کے مرکز ہندسی کی گہرائی مانع کی کثافت اہم کی کثافت کے مساوی ہے
 ۵۔ اگر ایک ہوس جسم کسی قید کے تحت تیرا ہونے توازن کی شرطیں قی کے حالات
 کی نوعیت ہتھ موٹی لیکن سرحدت میں قید کر کے والی قول کا مانع متعابلی سمیت
 عمل کرے گا تو چونکہ دوسری فزیکس میں سیالی دہنوار سمیت وزن (۱) متعابلی کرتی ہیں
 ۱۔ اگر جسم ایک سطح مابہت ہو تو توازن کی شرط یہ ہے کہ اس سطح کے
 مرکز جسم کے وزن ہٹا ہے ہر مانع کے وزن کے مساوی ہونے چاہئیں۔

اگر یہ شرط پوری ہو تو جسم ساکن ہوگا اور بنا بہ نہ ہوگا دباؤ ان دو وزنوں کے فرق کے مساوی ہوگا۔ اور مثال یہ ہو سکتی ہے کہ ہم ایسے ٹھوس جسم پر محور کریں جو پانی میں سیر رہا ہو اور ایک رسی کے ذریعہ ٹکایا گیا ہو جو پانی کی سطح کے اوپر ایک انگلی سے بلند ہوئی ہے۔ توازن کی حالت میں رسی انتہائی ہوگی اور اس کے تیناؤ اور حامل سیالی دباؤ جو ہٹا ہے ہونے سیال کے وزن کے مساوی ہے) کچھ مجموعہ جسم کے وزن کے مساوی ہوگا۔ اس لئے رسی کا تیناؤ جسم کے وزن اور مٹا ہے ہونے سیال کے وزن کے فرق کے مساوی ہوگا اور یہ دونوں وزن ان خاصوں کی نسبت منکوس میں ہونگے جو ان کے خطوط عمل اور دوری کے خط کے درمیان ہیں اور یہہ تینوں خطوط ایک ہی انتہائی ستوی میں ہونگے۔

۵۲۔۔۔ اندہ کی تحقیق میں حسب ذیل ہندسی مسئلے کا رد ثابت ہونگے۔

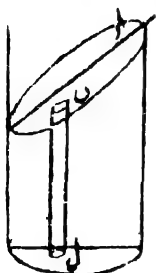
اگر ایک ستوی سطح ایک ٹھوس جسم کو قطع کرے اور اس ستوی کو ایک بہت چھوٹے زاویہ میں ایسے خط مستقیم کے گرد گھمایا جائے جو انی ستوی میں واقع ہو تو قطع کردہ حجم وہی رہے گا بشرطیکہ خط مستقیم ستوی تراش کے رقبہ کے مرکز ہندسی میں سے گزرتا ہو۔ اس کتابت کرنے کے لئے کسی قسم کے ایک اسطوانہ پر محور کرو جس کو ایسی ستوی سطح قطع کرتی ہے جو اس کے قاعدہ کے ساتھ زاویہ طرباتی ہے۔

فرض کرو کہ تراش اس کے مرکز ہندسی کا فاصلہ اسطوانہ کے قاعدہ سے $ح$ ہے اور تراش کے قاعدہ کا عنصر $م$ اور ستویوں کا درمیانی حجم $ح$ ہے تو

$$ح = \frac{م \times ن \times ل}{۲}$$

یہ $ح$ = $ح$ (جسم $ط$ \times $ن$ \times $ل$) \div ۲

$ح$ = $ح$ (قاعدہ کا رقبہ)



اب رقبہ $ح$ کا مرکز ہندسی ان تمام تراشوں کا مرکز ہندسی ہے جو ان نقطہ میں سے گزرنے والے ستوی قطع کرتے ہیں۔ یہ بات ان تراشوں کے ظل اسطوانہ کے قاعدہ پر پڑنے سے بخوبی ظاہر ہو جاتی ہے۔

اب چونکہ تمام تراشوں کے لئے $ح$ وہی ہے

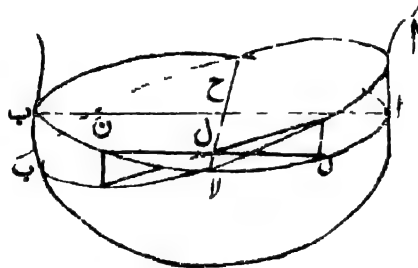
اس لئے قطع کردہ حجم بھی وہی ہو جائے۔

کسی شے کی صورت میں اگر قاطع مستوی کو اپنے مرکز ہندسی کے گرد ایک بہت چھوٹے زاویہ میں گھمایا جائے تو تراشوں کو محدود کرنے والے سطحینوں کے نزدیک کی سطح بغیر کسی قابل قدر غلطی کے اسطوانی خیال کی جاسکتی ہے۔ اور اس لئے مسئلہ بالاکلی تصدیق ہو جاتی ہے۔
بالفاظ دیگر قاطع مستوی کے مقام میں تبدیلی سے حجم میں جو نقصان اور اضافہ ہوتا ہے ان دونوں کا فرق کسی ایک کے مقابلہ میں نہایت چھوٹا ہوتا ہے۔

۵۔ تقریبات۔ اگر ایک حجم متجانس مائع میں تیرا ہو تو مائع کی سطح حجم کو جس مستوی پر قطع کرتی ہے اس کے تیراؤ کا مستوی کہا جائے گا۔
ہٹائے ہوئے مائع کی کیت کا مرکز ہند اچھا ل کا مرکز کہلاتا ہے۔

۱۔ حسب ذیل بات کو دیا جاسکتا ہے۔

فرض کر دو قاطع مستوی α ج، β ، ایک خط la کے گرد ایک چھوٹے زاویہ (ط) میں گھمایا گیا ہے اور اس کے رقبہ کا عنصر dr ہے۔



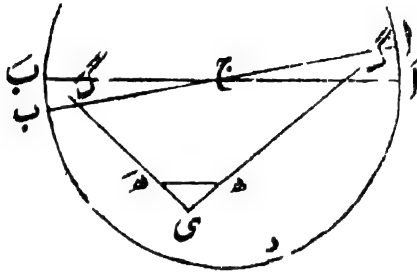
تو قطع شدہ حجم میں جو اضافہ ہوگا اس کی جبری قیمت kr ماحول کے مساوی ہوگی۔ اب اگر یہ معدوم ہو جائے تو kr ماحول = ۰، جو اس بات کی شرط ہے کہ α کا مرکز ہندسی محور la پر واقع ہو۔ اس طرح اگر β ج کو مرکز ہندسی فرض کیا جائے تو β ج میں سے گزرنے والا ہر مستوی اس رقبہ کا کوپورا کرے گا۔

مجموعیہ رقبہ کے قطع شدہ حجم کا جبری معیار محور la کے گرد kr ماحول ہے جو معدوم ہوگا اگر kr ماحول = ۰۔ یہی اگر محور la ج ماحول کے صدر می محاور ہوں۔

اگر جسم اس طرح حرکت کرے کہ پٹائے ہوئے مانع کا حجم بدلے تو تیراؤ کی مستوی سطحوں کے نفاذ کو تیراؤ کی سطح اور h کے طریق کو اچھال کی سطح کہتے ہیں۔

۵۔ اگر ایک مستوی حرکت کرے اس طور پر کہ اس سے ایک ٹھوس جسم کا ہمیشہ مستقل حجم قطع ہو اور اگر قطع شدہ حجم کا مرکز ہندی h ہو تو h پر اس سطح کا ماسی مستوی جو h کا طریق ہے قاطع مستوی کے متوازی ہوگا

دوسرے الفاظ میں تیراؤ کی سطح کے کسی نقطہ پر اور اچھال کی سطح کے متناظر نقطہ پر کے ماسی مستوی ایک دوسرے سے متوازی ہوتے ہیں۔



قاطع مستوی $ا ج ب$ کو ایک جھوٹے زاویہ میں بھراؤ فرض کر دو کہ اس کا نیا مقام $ا ج ب$ بنے قالان $ا ج ا$ اور $ب ج ب$ کے حجم سادی ہیں۔

فرض کر دو کہ ان قالان کے بعدی مرکز گنگ ہیں۔

گ h محدود میں نقطہ $ی$ کو اس طور پر کہ

$ی ہ : ہ گ :: حجم ا ج ا : حجم ا د ب$

گ $ی$ کو ملاؤ اور نقطہ $ہ$ کو اس طور پر کہ

$ی ہ : ہ گ :: حجم ب ج ب : حجم ا د ب$

تو $ہ$. $ا د ب$ کا مرکز ہندی ہوگا۔

لیکن $ی ہ : ہ گ :: ی ہ : ہ گ$

اور اس لئے $ہ ہ$ ، $گ گ$ کے متوازی ہے۔

جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر زاویہ $ا ج ا$ کو لا انتہا کم کر دیا جائے تو انہا میں

اور اچھال کا مخفی مکانی ۳۲ = ۱۲ لا ہے۔

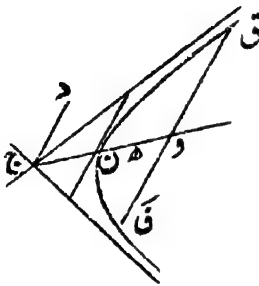
اس مکانی کے راس ہ پر انحناء کا نصف قطر $\frac{1}{2}$ ہے جو گ سے کم ہے۔

اس طرح ظاہر ہے کہ اچھال کے مخفی کے تین عماد کھینچ سکے ہیں جن سے توازن کے تین قیل ملیں گے۔

(۳)

۵۱۔ اگر جسم ایک پتھر ہو جو زائد سی قوس سے محدود ہو مخفی متشابہ زائد ہو گئے۔

اگر ق۱ وق۱ تیرا دو کا حظ ہو اور ۲۲ وق۱ ب۱



ق۱ ق۱ کے موازی اور اس کے مزدوج قطر

ہوں اور اس کے درمیان راوہ طہ ہو ا طرح

کہ ا۱ ب۱ جب طہ = ا۱ ب۱ نو

رفیق ق۱ ق۱ - $\frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{3}}$ لا - $\frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{3}}$ جب طہ فرلا

$$= \left\{ \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{3}} - 1 - \left(\frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{3}} + 1 \right) \right\} \text{ لوک}$$

اس طرح اگر ا کے ساتھ ایسی ج کو جو جن کے ساتھ جو نسبت ہے وہ متصل ہے

نیز

$$2 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ جب طہ فرلا لا لا لا - وق۱ فرلا}$$

$$- \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{3}} \right)$$

اور اس ج کو جن کے ساتھ جو نسبت ہے وہ مستقل ہے۔

بہر حال خالص مندی استدلال سے بھی مستنبط ہو سکتے ہیں۔

۵۲۔ ایک مندرجہ ذیل صورت میں جو اس طرح تیرا ہے کہ اس کا اس آزاد طح

کے نیچے سبب تیرا کی اور اچھال کی سطحیں گروستی زائد نما ہو گئی۔

اگر مندرجہ ذیل اس وائسی تراش کا محور اعظم ج۱ ج۱ اور ا۱ ب۱ پر کا محور وک

ہو جو جسم و اب

$$= \frac{1}{\pi} \times \text{وک} \times \frac{1}{\pi} \times \text{اب} \times \text{اب} \times \text{ب و ج ۲ء}$$

لیکن وک \times اب = وک \times وک \times ج ۲ء

کیونکہ ہر قطر رقبہ وک \times اب کا دو چند ہے۔ اس لئے حجم متلی ہونے سے بیحد نکھتا ہے کہ رقبہ وک \times اب مستقل ہے۔

۱۔ اس لئے مستوی تراش کے مرکز نہ سی ج کا ط فی ایک گردش رقبہ مابے ۱۰ و۔
جو کہ وک کا تیس چوتھائی ہے۔ اس لئے اجمال کی سطح سہی ایک ششماہ زائد نما ہے۔
۲۔ انص نما کے لئے اجمال کی اور تیرہ کی سطحیں۔

$$\text{اگر انص نما کی مساوات} \quad \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} \times \text{وک} \times \text{اب} \times \text{ب و ج ۲ء}$$

ی = ج ط کے اندراج سے یہ مسئلہ ایک کرد ما + سنا + طا = ۱ کے مسئلہ میں متحمل ہو جا
ہے اور اگر انص نما کے غرق شد حصہ کا حجم ج سے تعبیر ہو تو اس کے ب و ج میں رقبہ

ج وک سے تعبیر ہوگا۔

اسی یہ ظاہر ہے کہ یہ حجم قطع کرنے والا سہی نصف قطر کے ایک کے سہی کے سہی کے
اس سطح کے

$$\text{کر} (۱ - \text{لا}) \text{فرلا} = \frac{\text{ج}}{\text{وک} \times \text{اب}}$$

$$\text{یا} \quad \frac{1}{\pi} \times (۱ - \text{لا}) \times (۱ - \text{لا}) \times (۱ - \text{لا}) = \frac{\text{ج}}{\text{وک} \times \text{اب}}$$

یہ حجم جو قطع ہوتا ہے اس کا مرکز ہندی ایک ایسے کردہ رابع ہوگا جس کا نصف قطر سہی ہے
جہاں

$$\text{مس کر} (۱ - \text{لا}) \text{فرلا} = \frac{1}{\pi} \times (۱ - \text{لا}) \times (۱ - \text{لا}) \times (۱ - \text{لا})$$

یا $\frac{2(r+1)}{r+2} = \frac{3}{4}$ اصل مسئلہ کی طرف رجوع کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ تیراؤ کی سطح ایک متشابہ ناقص نما ہے جس کے نصف محور $\frac{r}{2}$ اور $\frac{r}{2}$ ہیں۔ جہاں

$$(1) \quad \frac{c}{\frac{r}{2}} = (r+2) = \frac{3}{4}$$

اور اجماع کی سطح ایک اور متشابہ ناقص نما ہے جس کے نصف محور $\frac{r}{2}$ اور $\frac{r}{2}$ ہیں جہاں

$$(2) \quad \frac{c}{\frac{r}{2}} = \frac{2(r+1)}{r+2} = \frac{3}{4}$$

زائد مواد چاندی کے لئے بھی اسی قسم کے نتائج حاصل ہو سکتے ہیں۔

۶۱۔ ناقصی مکانی نما۔

یہ صورت ناقص نما کے نتائج سے اس طور پر حاصل ہو سکتی ہے کہ ناقص نما کے نتیجوں میں $\frac{c}{r}$ کو اس طرح برابر $\frac{1}{2}$ لگاتنا ہی کیا جائے کہ

$\frac{c}{r} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{c}{r} = \frac{1}{2}$ جہاں $\frac{c}{r} = \frac{1}{2}$ مکانی نما کی صدی تراشوں کے

نصف وتر حاصل ہیں۔ اس لئے اگرستہ کی طرح اگر $\frac{c}{r}$ سے غرق شدہ محدود حجم تعبیر ہو تو

$\frac{c}{r} = \frac{1}{2}$ اصل نصف ہوگا اور $\frac{c}{r} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{c}{r} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{c}{r} = \frac{1}{2}$ اس لئے تیراؤ اور

اجماع کی سطحیں مساوی کافی نما ہیں۔ نیز ان کے راسوں اور دسے ہوئے مکانی نما کے راس پر جو فاصلے ہیں وہ $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ کی انتہائی قیمتیں ہیں۔

لیکن دفعہ ۶۰ (۱) سے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{c}{r} = \frac{2(r+1)}{r+2} = \frac{3}{4} \leftarrow \frac{c}{\frac{r}{2}} = \frac{3}{4}$$

اس طرح معلوم مکانی نما اور تیراؤ کی سطح کے درمیان محور پر کا مقطع وہ ہے جو گا جہاں

$$\frac{ج}{۱۳۴} = ج'$$

اسی طرح دفعہ ۴۰ (۲) سے

$$ج (۱-۴) = \frac{ج (۱-۴) (۳+۵)}{(۲+۳) ۴} \leftarrow ج' \frac{۲}{۳}$$

جس سے اجمال کی سطح کے لئے متناظر مقطوعہ ملتا ہے۔

۴۲ کسی تراش کا اسطوانہ۔

تیراؤ کی سطح نسبتاً ہندسی کے خط و نئے پر ایک نقطہ ہے جو $ج = ح$ سے حاصل ہوگا جہاں $ل$ نمودی تراش اور $ح$ غرق سند نجم ہے۔

فرض کر دو قاطع مستوی کی مساوات

ی $ح$ ل $لا + م + ج$ ہے اور سبزا و قاعدہ میں لیا گیا ہے۔

اجمال کے مرکز کے محدود (لا، آ، ی) ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں۔

$ح لا = کر لای$ فرلا فرما، قاعدہ تکمیل بنا گیا

$= کر لا (ج + ل + م + ما)$ فرلا فرما

$= اول + م$

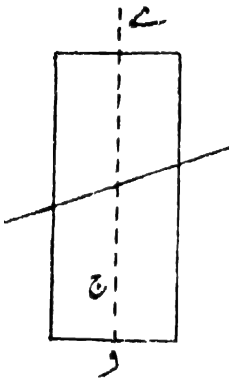
اسی طرح

$ح آ = کر لای$ فرلا فرما

$= ل + ب + م$

اور $ح ی = کر لای$ فرلا فرما

$= ل (۱ + ۵ + ۳) + م (۲ + ۲) + ج (۲) =$



جہاں $ا = لا$ فلا فرما، $ھ = لا$ ما فلا فرما، $ب = لا$ آ فلا فرما

اگر ہم تراش کے صدر می محوروں کو محور لا اور محور ما فرض کریں تو $ھ = . .$

اور $ح - آ = ا$ ، $ح - م = ب$ ، $ح - ی = ج$ ، $ح - لا = ا$ ، $ح - ب = م$ (۱)
اس لئے اجمال کی سطح کی مساوات ہے

$$\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = \frac{۲ - ی - ج}{ح}$$

۶۳۔ ایک گردشیں مجسم ایسے مانع میں تیر رہا ہے جو ایک انتقابی محور کے گرد گھوم رہا ہے گویا یہ ٹھوس ہے مجسم کا محور گردش کے محور پر منطبق ہوتا ہے۔ توازن کی شرط معلوم کرنا مطلوب ہے۔

گھومنے والے مانع کی کیت میں ایک گردشیں سطح کھینچو جس کا محور گھومنے والے مانع کے محور پر منطبق ہو۔ اس سطح کے اندرونی مانع کے توازن پر غور کرو۔ اس مانع پر سیالی دباؤں کا حاصل اس کے وزن کے مساوی ہونا چاہیے اس طرح اگر اس مانع کی جگہ کوئی مجسم لے لے تو اس کی سطح پر بھی یہی سیالی دباؤ عمل کریں گے اور اس لئے اس قسم کا مجسم متوازن ہوگا اگر اس کا وزن ہٹائے ہوئے سیال کے وزن کے برابر ہو۔ یہ قابل توجہ ہے کہ خواہ مجسم سیال کے ساتھ گھومے یا ان کی زاویہ رفتار مختلف ہو یا یہ ساکن ہو ہر صورت میں نتیجہ بالاصداق آئے گا۔
مثال :- ایک اسطوانہ گھومنے والے مانع میں تیر رہا ہے جس گہرائی تک یہ ڈوبتا ہے اسے معلوم کرو۔

اگر سہ زاویہ رفتار ہو تو آزاد سطح کے تکوینی مکانی کی مساوات اس کے اس کو مبداء قرار دینے سے $۲ = ۲$ ج ی ہوگی۔ اور اگر تیراؤ کے دائرہ کے نیچے یعنی اس دائرہ کے نیچے جو آزاد سطح اور اسطوانہ کی سطح کے تقاطع سے حاصل ہوتا ہے اسطوانہ کے قاعدہ کی گہرائی ہی ہو اور اس کے قاعدہ کا نصف قطر تو ہٹائے ہوئے سیال کا حجم، کی ارتفاع کے اسطوانہ

کے حجم اور سطح ارتفاع کے مکانی نما کے حجم کے فرق کے مساوی ہوگا۔
پس اگر اسطوانہ کی کثافت ρ اور سیال کی کثافت ρ_1

$$\rho_1 \text{ راف} = \rho (\text{رہ} - \frac{\rho_1}{\rho} \text{رہ})$$

$$\text{اور یہی} = \frac{\rho_1}{\rho} \text{رہ} + \text{ف} \quad \text{ف (ن اسطوانہ کا ارتفاع ہے)}$$

۴۔ زیادہ عام صورت ایسے جسم کی ہے جو جزائاً کلاً غرق شدہ ایسے مائع میں تیر رہے جو معلومہ قوتوں کے زیر عمل ساکن رہے۔ اور جن قوتیں جسم کے سالمات پر بھی عمل کریں ہیں۔
ایک جسم متوازن ہو تو اس پر کی حاصل قوت ہٹائے ہوئے مائع پر کی حاصل قوت کے مساوی ہوگی۔ اور ان قوتوں کے خطوط عمل وہی ہونگے۔

کیونکہ اگر ہم طے کر لیں کہ اس کی جگہ کو ہٹائے ہوئے مائع سے دیر زیادہ جتنے نو جسم پر سیال کا حاصل دباؤ وہی ہوگا جو ہٹائے ہوئے مائع پر ہے۔ اور اس سے وہ ہٹا ہوا مائع پر کی اصل قوت کے مساوی اور متقابل ہوگا۔

مثال۔ مائع کی کچھ کثیت ایسی قوت کے زیر عمل ساکن رہے جس کا مرکز ایک تہ نشہ ہے۔ اور جو ایسے برقی ہے جسے اس مرکز سے فاصلہ ایک ٹھوس جسم گروی فطاح کی شکل کا اس میں برقی تہ ساکن ہے۔ اس کا اس مذکورہ بالا ثابت نقطہ پر ہے مائع اور ٹھوس کی کثافتوں کا مفہد پر کرنا مطلوب ہے۔

توازن کی صورت میں فرض کرو کہ مائع کی آزاد سطح کا نصف قطر اور گروی فطاح کا نصف قطر r ہے۔ قطاع کے حجم کو ہٹائے ہوئے مائع کے حجم کے ساتھ $\frac{r^3}{R^3}$ کی نسبت ہوگی اور نو تہ کے مرکز سے ان کی کمیتوں کے مرکزوں کے فاصلے $\frac{r}{2}$ اور $\frac{R}{2}$ کی نسبت رکھیں گے۔
اگر کثافتیں ρ اور ρ_1 ہوں تو $\rho_1 \frac{r^3}{R^3} = \rho \frac{r}{2}$

مشلہ

۱۔ دو قائم ہم محور مخروطوں کو جن کے راسی راسوں سے جو کو ایک تہ بنایا گیا ہے۔ اس کو ایک برتن میں اس طرح رکھا گیا کہ اس کا ایک سر برتن کے افقی قاع پر چکا ہوا ہے۔

بحر اس میں پانی ڈالا گیا ہے اگر اوپر سے مخروط کا ارتفاع نیچے کے مخروط کے ارتفاع کا تین گنا ہو اور ان کی مشترک کثافت پانی کی کثافت کا چھ حصہ ہو تو ثابت کر کہ جسم عین اُسے کو ہو گا جبکہ پانی اس کے اوپر سے رے کے مستوی تک پہنچ جائے۔

۱۔ معلومہ وزن اور حجم کا ایک مخروط نیچے وار اس کے ساتھ تیر رہا ہے۔ ثابت کر کہ مخروط کی سطح جسکو مانع مس کرنا ہے کم سے کم ہوگی جبکہ اس کا زاویہ راس $\frac{\pi}{3}$ ہو۔
 ۳۔ ایک مربع تختہ ایک مانع کے اندر جس کی فاصلہ اس کا مرکز کا برابر ہے رکھا گیا ہے۔ ثابت کر کہ اس کے تیرے کے چاروں طرف محل ہو سکتے ہیں جبکہ اس کا صرف ایک معلومہ کونہ مانع کی سطح کے نیچے ہو۔

۴۔ ایک جسم پانی میں تیر رہا ہے۔ ایک گھوٹیلے برتن کو اندھا کر کے اس پر رکھا گیا ہے اور اسے نیچے دبا گیا ہے۔ جس کے محسوس کیا ارتدوع پذیر ہو گا (۱۱) الجھا برتن کے اندر فی مانع کی سطح کے زاویہ پانی برتن کے فی مانع کی سطح کے۔

۵۔ ایک گھوٹیلے نصف کرہی جل۔ لے کنارہ کے ایک نقطہ پر ایک وزن در درہ لگا دیا گیا ہے۔ خول پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ ذہ پانی کی سطح کے متن ہو رہے، اور کنارہ کی سطح پانی کی سطح کے ساتھ زاویہ 54° بنائی۔ یہ ثابت کر کہ

نصف کرہ کا وزن اس پانی کو رتن جو اس میں سما سکتا ہے $2\pi - 6 : 5$ ہے۔
 ۶۔ ایک مخروط جس کا نصف $\frac{\pi}{3}$ ہے اور محور کا طول $\frac{1}{2}$ ہے انتظامی محور اور

نیچے وار اس کے ساتھ ایک سیال میں تیر رہا ہے۔ جبکہ کثافت مخروط کی کثافت کا چھ حصہ ہے۔ ثابت کر کہ اس کے تمام کا محور پانی میں ہو گا۔ اگر سیال، مثل ٹھوس کے مخروط کے محور پر سطح ہوئے دے اُمتصالی کے کر کے $\frac{\pi}{3}$ کی زاویہ راس سے گھومے۔

۷۔ ایک ٹھوس مخروط کو اس کے محور میں سے گزرنے والے مستوی سے دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ یہ حصے ایک قبضہ کے ذریعہ اس پر جوڑ دے گئے ہیں اور اس نظام کو پانی میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ راس نیچے وار اور محور انتظامی ہو۔ اگر حصوں کی علیحدگی کے بغیر یہ نظام تیر رہا ہو تو ثابت کر کہ وہ نہ ہوگا طول ف جب سے بڑا ہے جہاں مخروط کے محور کا طول ف اور اس کا زاویہ راس $\frac{\pi}{3}$ ہے۔

۸۔ ایک مخروط کا راس ایک برتن کے مینہ سے بر جس میں پانی ہے ثابت کر دیا گیا ہے۔

مخروطی اسطوار پر توازن میں ہے کہ اس کا مائل ضلع استقامتی اور اس کے قاعہ کا زیر ترین سطح
یانی سطح کو عین مس کرتا ہے۔ مخروط کی کثافت کا یانی کی کثافت سے متقابل کرو

۹۔ منحنی $\frac{1}{4}$ = لہک۔ کے کو بیحد کو اس کے تقارب کے کر لکھا کر ایک یا لے کی

منحنی سطح بنائی گئی ہے یہ یا لہک مانع میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کو محور استقامتی
اور ٹوک سہا نیچے وار ہے اور اس میں ایک رماؤں ورنی مانع ڈال دیا گیا ہے، ثابت کرو کہ
اگر پیائے کو مناسب وزن دیا جائے تو دونوں مانعوں کی سطحوں کے درمیان فاصلہ
مستقل رہے گا۔

۱۰۔ ایک اسطوانہ ایک مانع میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور استقامتی سطح کے ساتھ
زاویہ میں اسے بنایا ہے اور اس کا اوپر وار سر سطح کی سطح کے عین اوپر ہے۔ ثابت کرو کہ
اسطوانہ کا نصف قطر اسکے ارتفاع کا چھٹہ ہے۔

۱۱۔ ایک ہی شے سے بڑے دو ڈنڈوں کے سے باہر دسے گئے ہیں اور
یہ ڈنڈے ایک مانع میں اس طرح تیر رہے ہیں کہ ان کا زاویہ مانع میں دسے گئے ہے۔ ثابت کرو کہ
یہ مانع کا منحنی مکانی ہے۔

۱۲۔ ایک مخروط نیچے وار اور اس کے ساتھ پانی کے ایک اسطوانی برتن میں تیر رہا ہے۔ اس کو
بیحد جوکانے کے پانی کی سطح سے عین باہر نکالا گیا ہے ثابت کرو کہ کام ہو کیا کیا وہ ہے

(۱۲ - ۱۱)

جہاں مخروط کا وزن دسے اور توازن کی حالت میں سطح کے نیچے وار اور پانی
لہے اور لہے کا طول ہے جو توازن کی حالت میں مخروط کے ہمارے پورے
پانی سے بھرا جاسکتا ہے۔

۱۳۔ ایک قائم مستدیر اسطوانہ اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا ایک سر اترق ہے۔
اچھا ل کی سطحیں معلوم کرو۔

۱۴۔ تھالیں مادے کی ایک وی برنی ممدار ہے ایک گروشی $\frac{1}{2}$ مانع $\frac{1}{2}$ مانع
جو نیچے وار اس کے ساتھ تیر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ تیراؤ کے سنو سے اس کے مرکز

پانی یرسا کہ ہے اس طور پر کہ اس کا زیرین نقطہ چل کر اس کے پاس نہ پہنچے بلکہ پانی رہا رہیں ڈالتا۔ اگر آزاد سطح حول کی کوریکنٹار سے میں سے گزرتا رہتا رہے۔
کرہ کی کثافت۔ یا نی کی کثافت : ۱۲۸ : ۸۹

۲۱ — ایک متساوی الساقین مثلثی پتھر (ج) (زاویہ ج قائمہ) ایسے میں جسکی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی اس طرح تیز ہوتی ہے کہ اس کی سطح۔ متوی امتصائی ہے اور اس کا زاویہ ج مانی میں ہر جی ہے اگر اب اس مانی سمیت۔ کے ساتھ دو۔ پتھر + ھ بنائے تو ثابت کر دو کہ توازن کے دونوں مخلول میں جن میں اب اضافی نہیں توانہ کی قیمت شکل ذیل کی مساوات سے حاصل ہوگی

م سب ط + جم ط - (ب ط + جم ط) ۲

۲۲ — ایک قائم مستطیر اسطوار میں جس کا سطح امتصائی سے مائع کی لمب و مقدار سے بدلتی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی اس میں مساوی ہے تاہم وہ کا قائم مخروطیہ پھر اسطوار کے محور پر منطبق ہوتا ہے نیچے دار اس کے ساتھ آہستہ آہستہ رول ہو۔ تاہم وہ رول دیا گیا ہے اگر مخروط لہ ازن میں ہو جبکہ مائع میں میں سے قی ہو تاہم اس کو کہہ کر کہ مائع میں گہرائی بڑھنے کی ابتدائی کثافت کے مساوی ہوگی جو کہ دو۔ م سب ط + جم ط - (ب ط + جم ط) ۲

۲۳ — ایک ٹھوس مخروط جس کا ارتفاع ۲۸ اور اس کے کثافت ۱۰۰ ہے اس کے گرو حرکت کر سکتا ہے۔ اس کا اس ایک مائع کی سطح کے نیچے گہرائی ثابت کر دیا گیا ہے۔ یہی گہرائی مائع کی کثافت سے ہی ہے۔ مخروط متوازن ہے اس طرح اس کا مرکز محور انتضابی سمت کے ساتھ راویط بنانا ہے اور اس کا قاعدہ مائع کی سطح کے ماہر ہے ثابت کر دو۔

م سب ط + جم ط = ۵ ف ف + جم ط + جم ط - (ب ط + جم ط) ۲

۲۴ — ایک مکمل مکافی منابر تن جس میں ایک وزن دار کرہ پڑا ہوا ہے یا نی میں تیر رہا ہے۔ اس کے اس پر ایک سوراخ ہونے کی وجہ سے رتن اور کرہ کی درمیانی مضامیالی سے بھری ہوئی ہے۔ اگر کرہ کا حاصل دباؤ اس یانی کے نصف وزن کے مساوی ہو جو کرہ کے بھرنے کے لئے دار کار ہوتا ہے تاہم کرہ پانی کی سطح کے نیچے کرہ کے مرکز کی گہرائی ۲۸ ہے جہاں مکافی فنا کا وتر خاص ۱۴ اور اس سے تمام مستوی

کا فاصلہ ج ہے۔

۲۵۔۔۔ ایک تمام مغبوط نیچے دار اس کے ساتھ ایک سیال میں تیر رہا ہے جس کی کثافت ایسے بڑی ہے جیسے گہرائی۔ اگر توازن کے محل میں اس کا محور انتصابی سمت کے ساتھ زاویہ طے کر سکے تو نہایت کمزور کہ

۵۴ م تظاظ (جملہ ط - مباء) $\frac{6}{11}$ - ۴۴ م تظاظ $\frac{1}{11}$

جہاں غمخوڑ کا نصف راویہ داس اور نڈاس کی کثافت اور ف سیال کی اس گہرائی پر کثافت ہے جو مخوڑ کے اہل ضلع کے مساوی ہے۔

۲۶۔ ایک قائم الزاویہ مثلثی منشور ایک سیال میں جس کی کثافت ایسے دیتی ہے جسے گہرائی اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا زاویہ قائمہ غرق ہے اور کنارے افقی ہیں۔ ثابت کرو کہ اجمال کے معنی کی شکل ہے

زجیب ط حم ط = گ

۲۷۔ لنگر چیلے کی شکل کی ایک جان لیوٹی ہے جس کی تینوں ایک دائرہ سے ہوئی ہے جبراً نصف قطر ہے۔ یہ جان لیوٹی پانی میں زیر رہی ہے اس طور کہ اس کے خط استوا میں سے گزرنیوالی سمتی طعنائتی ہے۔ ثابت کر دو کہ غرق شدہ گہرائی ہی مساواں ہوں

۵ = ۱ (۱ - حجم :)

۴۴ س = (۲۰ - جب ۲۰)

سے حاصل ہوگی جاں میں جان میٹھی کے مارے کی کثافت نوعی ہے۔

۲۰۔ — ایک مکافاتی تیرا ایک دوسرے معین سے محدود ہے جو محور پر محدود ہے اور نیچے وار اس کے ساتھ ایک مانع میں تیرا ہے اسطور پر کہ اس کا اسکے مانع کی سطح میں ہے اور اس کا محور انتصابی سمت کے ساتھ زاویہ میں اس طرح بنا ہے۔ ثابت کرد کہ مانع کی کثافت اور تیرے کی کثافت میں ۲۱۶ : ۴۱۱ کی نسبت ہے اور محدود کرنے والے معین کا طول و تر خاص کا متین گنا ہے۔

۲۹ — ایک ٹھوس مخروط جس کا ارتفاع ۴، کثافت ۱۰ اور زاویہ راس ۲۰ ہے ایسے راس سے گرد آزادانہ گروشن کر سکتا ہے۔ اس کا راس مائع کی سطح کے اوپر بلندی ۵ پر تابت

کر دیا گیا ہے۔ مانع کی کثافت ۳ ہے اگر غوطہ اس طور پر تیرا ہو کہ اس کا قاعدہ پوری طرح غرق ہو اور اس کا محور انتہائی سمت کے زاویہ طہ بنائے تو ثنابت کر کہ

$$ف^۴ (ث - ۳) = (جم + ط + ع) (جم - ط - ع) = ۲ = دقت جم ط جم ع$$

۳۰۔۔۔۔۔ لا انتہا چھوٹا ہر ف کا مرکز جس کی شکل قیام مستدیر اسطوانہ خیال کیجا سکتی ہے پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتہائی ہے جو حصہ غرق ہے اس پر ثنابت کے دوسرے ذرات آ کر جیسے جاتے ہیں اس طور پر کہ اس کی اسطوانہ شکل برقرار رہتی ہے اور اس کے محور او بیض قطر میں مساوی دقت میں مساوی اضافہ ہوتا ہے۔ غیر غرق شدہ حصہ کی انتہائی شکل معلوم ہو۔ اگر ثنابت کی کثافت اضافی ۹۹ ہو تو ثنابت کر کہ اس کی سطح منحنی

$$۱ (۹ - لا - ما) = ۲۵ = ۲۴$$

کی گردش سے حاصل ہوگی۔

۳۱۔۔۔۔۔ ایک مساوی الاضلاع مثلث ایک مانع میں تیر رہا ہے جس کی ثنابت مثلث کی کثافت کا چار گنا ہے۔ اچھال کی پوری سطح دریافت کرو۔ اور ثنابت کر کہ آن لفت سطح پر چال انحناء غیر مسلسل ہے منحنی کے ماس زاویہ

$$مسیر = \frac{۳.۱۴.۱۲}{۱۰.۶}$$

پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

۳۲۔۔۔۔۔ ایک ٹھوس جوستویں لا = ۱۰ ما = ۱۰ ب ، می = ۱۰ ی = ج سے محدود ہے پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ قاعدہ ی = ۱۰ پوری طرح غرق ہے۔

ثابت کر کہ ایسے ہٹاؤں کے لئے جن میں غرق شدہ حجم مستقل رہے اور قاعدہ پوری طرح پانی کے اندر اور اس کے مقابل کا رخ پوری طرح پانی کے باہر ہے اچھال کی سطح کی مساوات ہے

$$\frac{لا}{۲} + \frac{۱}{ب} = \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

۳۳۔ کسی عمودی تراش کا ایک اسطوانی ظرف اس طرح تیار ہا جسکے اس کے محور کا ۲ ج طول غرق ہوتا ہے جب کہ محور انتصابی ہو۔ ثابت کرو کہ اچھال کی سطح کی مساوات ہے

$$\frac{y}{j} = \frac{a}{b} + \frac{a'}{b'}$$

جہاں انتصابی حالت میں محور کا جو حصہ غرق ہوتا ہے اس کا وسطی نقطہ مبداء ہے، محوری انتصاباً اور مدار ہے اور مدار لا، ما عمودی حالت میں تیراؤ کی نسبی سطح کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والے جہود کے معیاروں کے عمودی محوروں کے متوازی ہیں اور تیراؤ کی سطح کے ان محوروں کے لئے گردش کے نیم قطر ہیں۔



(۸۲)

پانچویں

تیرنے والے جسموں کے توازن کی قائمیت

۶۵۔ اگر ایک تیرنے والا جسم کے محل میں کسی سمت میں صیغہ سا ہٹاؤ پیدا کیا جائے تو عام طور پر جسم یا تو ایسے اصلی محل پر یا اس پر نیلی طرف مائل ہو گا یا اس محل سے دور دھنسنے کا رجحان رکھے گا۔ ہٹاؤ کی اس خاص سمت کے لئے صورت اول میں توازن کو قائم اور صبریت دوم میں غیر قائم کہتے ہیں۔

پہلے اچھوٹے امتصافی ہٹاؤ پر غور کرو۔ اگر جسم تنہا اس سیال میں جزو فوق سندہ ہو یا ایک پیر ہی اس سیال میں جس کی کھٹ گہرائی کے ساتھ ہر ہستی ہے جزو یا کائنات سندہ پر رہا ہو تو یہ ظاہر ہے کہ اس کو دبا کر نیچے اتار دینے سے ہٹاؤ ہونے سیال کا دباؤ سر ہٹاؤ کا اور مر حلاف اس کے اسکو اور اٹھانے سے یہ دباؤ ٹھٹ جائیگا۔ اس لئے ہر صورت میں سیالی دباؤ کا میلان جسم کو اس کے سکوں کے محل کی طو لیا لے گا سوگا۔ اور اسلئے امتصافی ہٹاؤ کا لحاظ کرتے ہوئے توازن قائم ہے۔

لیکن یہ یاد رہے کہ یہ امتصافیات صرف محسوس اجسام کے لئے مابت کی گئی ہے۔ ہٹاؤ کی وجہ سے دباؤ میں جو اضافہ ہوتا ہے اگر اس سے تیرنے والے جسم کے کسی حصہ میں یکساں پیدا ہو جائے تو توازن کا قائم ہونا ضروری نہیں بلکہ فی الحقیقت یہ غیر قائم ہو سکتا ہے۔

کسی امتصافی ہٹاؤ سے عام طور پر جسم کے محل میں امتصافی اور زیادہ دباؤ دونوں تبدیلیاں وقوع پذیر ہوتی ہیں۔ لیکن اگر ہٹاؤ چھوٹا ہو جیسا ہم نے

فرض کیا ہے، جسم کے محل میں ان بدیلیوں کے اثرات براہِ الگ الگ خور کیا جاسکتا ہے۔ اب ہم ایک چھوٹے زاویہ مثلاً دو کے اثر پر یہ فرض کر کے غور کریں گے کہ ہٹائے ہوئے سیال کا دباؤ ہمیں بدلتا۔ اور اس لئے سیالی دباؤ جسم کی کمیت کے مرکز کو اٹھانے یا بٹھانے میں کوئی میلان نہیں رکھتا۔

۶۶۔ ایک ٹھوس جسم سکون کی حالت میں ایک متجانس مائع میں تیر رہا ہے اسکو ایک دے ہوئے انتقصابی مستوی میں، ایک چھوٹے زاوے میں سے گھمادیا گیا ہے۔ یہ معلوم کرنا مطلوب ہے کہ سیالی دباؤ جسم کو اپنے ابتدائی محل میں لیجانے کا میلان رکھے گا یا نہیں۔

فرض کر دو کہ محورِ ما کے گرد جو تیراؤ کے مستوی اوب میں واقع ہے جسم کو چھوٹے راویہ ط میں سے گھمایا گیا ہے، و ما کا غنہ کے مسنوی پر علی القوائم ہے ابتدائی محل سے ولا تیراؤ کے

واقع ہے۔ فرض کرو کہ جیسے جسم
گھمایا جاتا ہے یہ محور اس کے
ساتھ ہی جاتے ہیں۔

اگر تیراؤ کے مستوی پر رقبہ
کا عنصر فرما فرماستے تبصر ہو تو

عنصری ستون ناق کا حجم

ی فرلا فرما ہوگا جہاں ی طول نق کو تعبیر کرتا ہے، ہٹائے ہوئے محل میں متناظر ستون نق کا طول ی + لاطہ اور اسکا حجم (ی + لاطہ) فرلا فرما ہے۔ یس ہٹائے ہوئے سیال کا حجم ح دونوں صورتوں میں دہی ہوگا اگر

فکری (ی + لاط) فرلا فرما = τ = فکری فرلا فرما

جہاں تکملہ جسم کی اُس تراش پر لے گئے ہیں جو ابتدائی محل میں تیراؤ کی سطح سے قطع ہوتی ہے۔

یہ اس جملہ میں تحویل ہو جاتا ہے $\text{لا فرلا} = \text{ما}$ ۔ جس کے یہ معنی ہیں

کہ سطحی تراستس کا مرکز ثقل دما پر واقع ہونا چاہیے جیسا کہ صفحہ ۵۲ میں ثابت کیا گیا ہے۔

فرض کرو کہ یہ شرط پوری ہوتی ہے۔ ابتدائی عمل میں مرکز ثقل ث اور اچھال کا مرکز ھ ایک ہی اقتصادی خط میں واقع ہوتے ہیں اور اچھال کے مرکز کے ممدوں کو ہم (لا، آ، تی) سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ یہ ہم دیکھنے میں کدھ کے لئے (لا، آ، ما) وہی ہیں۔ پٹائے ہوئے عمل میں اچھال کا مرکز مقام ھ پر چلا جاتا ہے اور فرض کر کہ ھ کے محدود ابتدائی محوروں کے حوالے سے (لا، آ، تی) ہیں۔

اب $\text{ح لا} = \text{لا ی فرلا فرما}$ ، $\text{ح ما} = \text{لا ی فرلا فرما}$ ،

$\text{ح ی} = \text{لا ی فرلا فرما}$

جہاں سے ی ستون ن کے حجم کو ی فرلا فرما لیکر اس کے مرکز ثقل کو اسے طول کے وسطی نقطہ پر لایا گیا ہے اور یہ سیکلے اس بنا پر لگے گئے ہیں۔

پٹائے ہوئے عمل میں متناظر عنصری ستون ن قی ہو گا جس کا ط ا $\text{ی} + \text{لاط}$ ہے۔ اس کا مرکز ثقل ن سے $\frac{1}{4} (\text{ی} + \text{لاط})$ فاصلہ پر واقع ہے اور اس لئے ن سے $\frac{1}{4} (\text{ی} - \text{لاط})$ فاصلہ پر۔ اسلئے

$\text{ح لا} = \text{لا ی فرلا فرما}$ ، $\text{ح ما} = \text{لا ی فرلا فرما}$ ، $\text{ح ی} = \text{لا ی فرلا فرما}$

$\text{ح ی} = \text{لا ی فرلا فرما}$ ، $\text{ح ی} = \text{لا ی فرلا فرما}$ ، $\text{ح ی} = \text{لا ی فرلا فرما}$

ہم دیکھے ہیں کہ جھوٹے راویہ ا کی پہلی قوت تک $\text{ح ی} = \text{ح ی}$ اور اس لئے اچھال کی سطح کا ماسی سنوی تیراؤ کے مستوی کے متوازی ہے جیسا کہ صفحہ ۵۲

میں ثابت کیا گیا تھا۔

اب ہٹائے ہوئے محل میں جسم پر مساوی و متقابل دو متوازی قوتیں عمل کرتی ہیں یعنی ایک قوت اس کا وزن و دیگر شح ح نقطہ ث میں سے انتصاباً نیچے وار عمل کرتا ہے اور دوسری اچھال کی قوت جو نقطہ ھ میں سے انتصاباً اوپر وار عمل کرتی ہے۔ یہ قوتیں ایک جفت بناتی ہیں۔ اس جفت کا مستوی گردش کے محور پر علی التوائم ہو گا صرف اُس صورت میں جبکہ فٹا ط ھ ایک ایسے انتصابی مستوی میں واقع ہوں جو دما پر عمود وار ہے۔ یعنی اگر $\text{ما} = \text{ما}$

کریا (ری + لاط) فرلا فرما = کرای فرلا فرما

جو کرای فرلا فرما = . ، میں تحول ہو جا رہا ہے جس کے

یعنی ہیں کہ گردش کا محور دما ، جسم کی اُس تراش کا جمود کا صدری محور ہونا چاہیئے جو تہراؤے مستوی سے قطع ہوتی ہے۔

جب یہ شرط پوری ہو تو ھ میں سے گزرنے والا انتصابی خط ھ ت کو ایک نقطہ م پر قطع کریگا جسکو ہم مرکز یا پس مرکز کہیں گے۔

جسم پر عمل کرنے والا جفت و شح م ط



جسم کو اپنے اصلی محل پر لیجانے کا میلان رکھتا ہے اگر م ، ش کے اوپر واقع ہو یا یہ انہی جہاز کو بڑھانے کا میلان رکھتا ہے اگر م ، ش کے نیچے واقع ہو۔ نیز حاصل ہوتا ہے ھ م م ط

ہ ہ = لا۔ لا

= ط اگر لا فرما

ح

اسلئے ہ ہ = - چ اچھا جہاں اس گزشتہ کے محور کے گرد جسم کی اوس

بڑائی کا جو دو کا معیار ہے جو تیسرے کے مستوی سے قطع ہونی ہے۔

اس لئے جسم کو اپنے اصلی محل کی طرف لیجائے گا سیلان رکھنے والا جنت
یہی استر وادی جنت ہے

ج ت ح (ہ ہ - ہ ت) = ج ت (ا س - ح) = ہ ت

۴۔ اب یہ کوئی عملی سٹیج تراس کے مرکز ثقل سے ہونے والے سادہ
دو ہوتے ہیں جن کے جواب میں محور کے معیار میں ہونے والے اس لئے
ان میں سے ہر ایک کے ایک گام ہوتا ہے۔ یہی جنت پیدا کرے گا
جو جسم کو متوازن کرنے کا سیلان رکھے گا اگر ہ ت = ح = ج ت = ح

ہیں۔ ان میں کی تائید کے لئے ہم دیکھیں۔

۶۸۔ کام ہو مٹا دیا کر کے میں کیا جاتا ہے۔ جب کہ تو ایک چھوٹے
راویہ میں ہونے والی تراس کے مرکز ثقل میں سے گزرتے ہیں ایک سیدھی محور
گردیدہ ایسا ہے تو جسم پر عمل کرنے والا جنت ہو گا

ج ت (ا س - ح) = ہ ت

اس لئے یہ ایک چھوٹی مقدار فرط کا اضافہ پیدا کرے کے لئے موزوں

جو کام سے کا وہ = ج ت (ا س - ح) = ہ ت

مکمل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ راویہ بناؤ ط کے پیدا کرے میں حکم کیا جاتا ہے وہ

= ج ت (ا س - ح) = ہ ت

۶۹۔ قاننیت کے شرائط کا کافی ہونا۔ یہ او کے مسہی میں کسی ایسے محور کے گرد جو پانی تراش یا فاصل آب کے مرکز ثقل میں سے گزرتا ہے اگر چھوٹا گھماؤ یا گردشیں لہ لی جائے تو یہ گردشیں و گردشوں ط ۰ ط ۰ کا مرکب خیال کی جاسکتی ہے جنہیں بالترتیب فاصل آب کے مدد سی محوروں کے گرد لیا جائے۔ ان میں سے ہر گردش علیحدہ طور پر ایک استہدادی جفت پیدا کرتی ہے اور اس لئے ہٹاؤ کے پیدا کرنے میں بیرونی عامل کا کل کام یا توانائی بالقوہ میں اضافہ ہوگا

ط ج ث (ج - ح × ھ ٹ) + ط ج ت (ج - ح × ھ ت) ط

جس سے نتیجہ ستبظ ہوتا ہے کہ شرائط ھ ٹ > ط ج اور نیز > ط ج ایسے ہٹاؤں کے لئے قاننیت کی کافی شرطیں ہیں جن سے ہٹائے ہوئے مانع کے حجم میں تغیر واقع نہیں ہوتا۔

۷۰۔ قاننیت کے مسئلہ پر بحث کسی قدر مختلف ہر ایہ میں ہو سکتی ہے۔ مرکز البعد یا پس مرکز کی یہ تعریف کہ وہ خط ھ ت اور ایک خفینہ ہٹاؤ کے بعد اجماع کے نئے مرکز میں سے گزرنے والے انتصابی خط کا نقطہ تقاطع ہے جس مسئلہ ذیل کی طوف رہبری کرتی ہے۔

پس مرکز اجماع کے منحنی کے اس نقطہ پر کا مرکز انحصار ہے جہاں پر ت میں سے گزرنے والا انتصابی خط اس منحنی سے ملتا ہے۔

یہ صاف ظاہر ہے کیونکہ نقطہ ہر منحنی کے متصلہ عا دوں کا نقطہ تقاطع ہے۔ پس اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کسی ہٹاؤ کے لئے بشہ طیکہ ہٹایا ہوا حجم وہی رہے، سیالی دباؤ کی سمت ہمیشہ اجماع کے منحنی کے برہیجہ کا انتصابی

۱۔ اس قسم کے ہٹاؤں کو کام ہوتا ہے اس کے جلد میں ط ۰ ط ۰ والی رقم شامل ہیں ہوتی۔ اس کو دو آئیدہ ۹ کی طرح تات کیا جاسکتا ہے۔

۷۲۔ گزستہ دفعہ میں یہ بات فرض کر لی گئی ہے کہ سیالی دباؤ کے عمل کا انتصابی خط ایک خفیف ہٹاؤ کے بعد ہٹ کو قطع کرتا ہے۔ یہ صرف اُس وقت درست ہوگا جبکہ ہٹاؤ کی سطح مسوی نقطہ ہر براجمال کی سطح کی صدری تراستس ہو۔ جب یہ صورت نہ ہو تو ہٹاؤ کے انتصابی مستوی پر خط عمل کا ظل، ہٹ کو نقطہ ہر پر قطع کرے گا جو سطح کی عمادی تراشیں کا مرکز انخا ہوگا۔

اس لئے نقطہ ہر پر اجمال کی سطح کی کسی عمادی تراش کے انخا کا نصف قطر $\frac{1}{2}H$ ہوگا اور اگر تیراؤ کے مستوی کے جوہ کے صدری معیار اس کے مرکز ہندسی پر $\frac{1}{2}H$ ہوں تو اجمال کی سطح کے انخا کے صدری نصف قطر $\frac{1}{2}H$ پر

$$-\frac{H}{2} \text{ اور } \frac{H}{2}$$

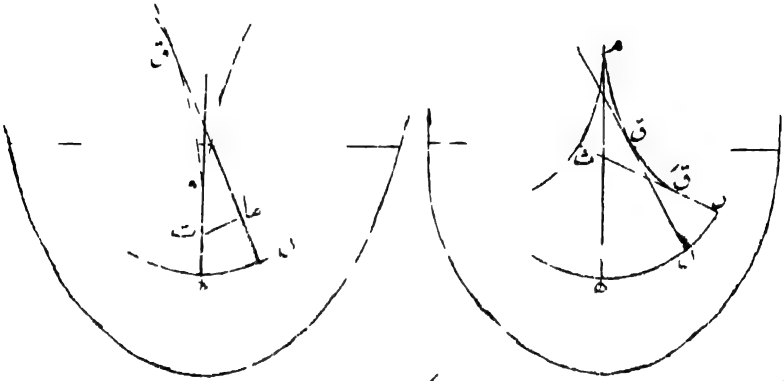
ہونگے اور اس کی صدری تراشیں تیراؤ کے مسوی کے صدری محوروں کے -توازی ہونگی۔

۷۳۔ قدماً ایک نہایت اہم صورت پیش ہوتی ہے۔ یہی ایک جہاز کے توازن کی تائیت کا سوال جبکہ رولنگ (Rolling) کی وجہ سے اس کے محل میں ہٹاؤ پیدا ہو۔

عام طور پر جہاز کے لئے اُچھلے (Tossing) کے بغیر مدھکننا ممکن نہیں ہے کیونکہ جہاز کے دونوں سرے غیر متشاکل ہوتے ہیں۔ لیکن ایک بہت لمبے جہاز کی صورت میں جیسے کہ عام طور پر بحر اوقیانوس (Atlantic Ocean) میں چلنے والے جہاز ہوتے ہیں یہ مان لیا جاسکتا ہے کہ جہاز ایک مستوی سے جو اس کے طول پر عمود دار ہو متشاکل تقسیم ہو سکتا ہے۔ اس صورت میں جہاز میں متشاکل کے دو انتصابی مستوی ہونگے۔ اور اس لئے انتصابی خط ہٹاؤ کے تیراؤ کے مستوی کے مرکز ہندسی ج میں سے گزرے گا۔

یہ خط ہٹاؤ اجمال کے متنی کو متشاکل تقسیم کرتا ہے اور نقطہ ہر اعظم

یا اخل انما کا نقطہ ہے۔ ان میں سے پہلی صورت میں ریجیجہ کا قرن بیچے کی طرف



نکھیا ہے اور دوسری صورت میں اوپر کی طرف نکھیا ہے۔

نقطوں سے ہٹاؤ کے اثرات فوراً ظاہر ہو جاتے ہیں۔

پہلی صورت میں تقویمی معیار امر (Righting moment) جو ہٹاؤ کے دئے ہوئے راویہ کے لئے تائیت کا سہ نیاقی ماپ ہے اس کے مناسب ہے جو نقطہ سے ماسن ق مود ہے اور ہٹاؤ کے راویہ کے ٹرنے سے بڑھتا ہے۔

دوسری صورت میں تقویمی معیار اعظم نیت اعداد کر ہے اور اس نخل بعد دم ہو جاوے جو ماسن ق سے ماضل ہوتا ہے۔ یہ نوارن کا ایک محل ہے لیکن اسے توازن کا غیر قائم ہے کیونکہ عام جیلی قانون کے مطابق قائم اور غیر قائم نوارن کے محل بری اری سے یکے بعد دیگرے وقوع پذیر ہو سکتے ہیں۔

اگر کو مسداوان کر اچھال کے معنی کی مساوات $C = Z$ (نہ) حاصل کی جائے تو

$$C = M = \frac{W}{g}$$

اور تقویمی معیار ہوگا W و g فر

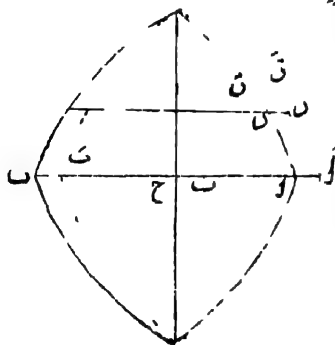
جہاں د جہاز کا وزن ہے۔
عام طور پر معمولی ہٹاؤں کے لئے اچھال کا معنی نقدیاً رائڈ کی ایک
فوس ہوگا اور پہلو جہاز کی صورت میں ایسی جہاز کی صورت میں جس کے
پہلو خط آب کے نزدیک انتہائی ہوں اچھال کا معنی مکانی کی فوس
ہوتا ہے۔

جہاز کی صورت میں اگر رائڈ کے لئے مرکز مابعد ہر ہو تو حاصل ضرب
وہ ہٹاؤں کو جہاز کا استحکام (Stiffness) کہتے ہیں۔

۳۔ ڈیوین کا مسئلہ۔ سیدھا تیرنے والے جہاز کی صورت میں تیراؤ کی
سطح کی عرضی تراش کے انحصار سے قطع ہوگا

$$I = \frac{M \times S^2}{12}$$

جہاں نامسل آب کے گھیرے کا عنصر فرس ہے، اس کا رقبہ ہے
اور جہاز کے پہلو کا انتہائی سمت کے ساتھ میلان ہے۔ اور محاور لا اور ما
جہاز کی اس تراش کے طولی اور عرضی محور ہیں جو تیراؤ کے مستوی سے قطع
ہوتی ہے اور یہ محور اس مستوی کے مرکز ہندسی ج میں سے گزرتے ہیں
اس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو



کہ تیراؤ کی سطح کی عرضی تراش پر جہاز
دو متصل نقطے ہیں اور جہاز کا ماسی مستوی
فاصل آب ان فاصل کے ساتھ
چھوٹا راویہ طہ بناتا ہے اور فرض کرو کہ اس
ماسی مستوی سے جہاز کی جو تراش حاصل
ہوتی ہے اس کا ظل فاصل آب پر
ان ق ق ب ہے، اس طرح جہاز کا

ظل ف رقبہ ان ق ق ب کا مرکز ہندسی ہے۔ فرض کرو کہ متساظر ہے۔
ن ق ن ق ہیں اور ان ق = فرس تو

رقبہ ل ق ن ق = ماط مس م فرس

ج ف × (ل) = ل ناط مس م فرس

اور چونکہ ج ج = ر ط اور انتہا میں ج ف = ج ج اس لئے

ر ط = ل ناط مس م فرس

اس تھوڑے سب سے پہلے سی ڈیوین (C Dupm) نے اپنے

ایک مقالہ میں سائنس کی اکادمی (Academie der science) کو
تسلط میں پیش کیا۔ حولی راسش کے انخنا کے نصف قطر (ر) کے لئے
بھی ایک متناظر جملہ نہ چاہا ہو دے۔

۵۷ — لیکٹر کا مسئلہ — (الر ع) اور حولی مٹاں کے لئے پس م کزی
بلندیوں کو سنی اچھال کی سطح کی سطح اور حولی تراشوں کے انخنا کے نصف قطروں
کو ر اور س سے تعبیر کیا جائے تو ہم جاتے ہیں کہ

$$ر = \frac{ج}{ح} \text{ اور } س = \frac{ج}{ح}$$

جہاں ج اور ح فاصل آب کے جمود کے صدی معیار ہیں۔ لیکٹر
نے ان مقداروں میں حسب ذیل روابط قائم کئے

$$ر = \frac{فرج}{فرح} = ر + \frac{ج فر}{فرح} ، س = \frac{فرج}{فرح} = س + \frac{ح فر}{فرح}$$

لیکٹر کے اس مضمون کا ترجمہ مسٹر میری نیلڈا (Messrs. Neill & Co.)

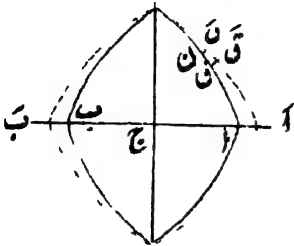
نے The proceedings of the Institute of Naval Architects کے

میں اور مارچ ۱۸۷۲ء کے (Messenger of Mathematics)

میں دیا ہے جو دو ثبوت وہاں دئے گئے ہیں ان میں سے پہلا حسب ذیل ہے۔ تاریخی
سیسی کی خاطر اسکو یہاں بیان کیا جاتا ہے امید وہ ۸۰ میں اس کا زیادہ باضابطہ
ثبوت دیا جائیگا۔

فاصل آ ب کے موازی اور اس سے فری فاصلہ پر تراش لینے سے

فرح = $\frac{1}{2}$ فری



فرض کر دو کہ آ ق ن ب فاصل آ ب
پر اس نئی تراش کا ظل ہے۔ تو فرج
آ ق ن ب اور آ ق ن ب کے
درمیان رقبہ کے جہود کا معیار ہے۔

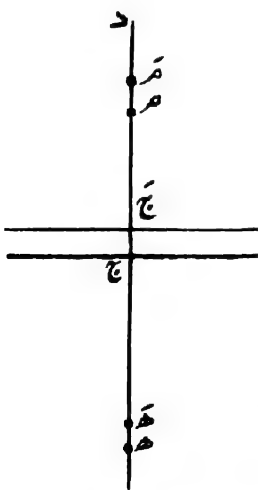
∴ فرح = $\frac{1}{2}$ ما فری × مس و فرس

اور فرج = $\frac{1}{2}$ ما مس و فرس

پس $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\text{فرج}}{\text{فری}} = \frac{\text{فرج}}{\text{فری}}$

(۷۶)

∴ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\text{فرج}}{\text{فری}} = \frac{\text{فرج}}{\text{فری}}$



۶۔ بار میں اضافہ جہاز کے بار
میں اگر اضافہ کیا جائے تو اس کا اثر
مرکز مابعد کے محل پر۔

یہ مان کر کہ جہاز میں تشاکل کے
دو انتظامی مستوی ہیں فرض کر دو کہ تیراؤ
کے مستوی کا مرکز ہندسی ج ہے ان میں
سے ایک مستوی میں تائیدیت پر محور کر دو۔
بار میں خفیف اضافہ کی وجہ سے

فرض کر دو کہ ج کا نیا مقام ج ہے اور مزید ہٹاؤ مع ح سے تعبیر ہوتا ہے۔

اب اگر پھر مر کے نئے محل ہوا اور مہ ہوں تو

$$m_r = m_{\bar{r}} - m + m_h$$

$$dH + V =$$

لیکن ج ہ × م ف ح = ح × ہ ہ

$$\text{م م} = \text{مف ر ج ه} \frac{\text{مف ج}}{\text{ج}} = \frac{\text{مف ج}}{\text{ج}} (\text{م} - \text{ر} + \text{ج ه})$$

جہاں رہے۔ حج و تعبیر ہوتا ہے جو تیراؤ کی سطح کا نصف قطر اٹھائے۔

$$\frac{m}{h} = \frac{m}{h} + \frac{m}{h} + \frac{m}{h}$$

مصحح (هد- ه م)

پس معلوم ہوا کہ پس مرکز بلحاظ جہاز کے اوپر اٹھتا ہے اگر یہ تیراؤ کی سطح کے مرکز انخنا کے نیچے واقع ہو اور نیچے بیٹھا ہے اگر یہ مرکز انخنا کے اوپر واقع ہو

۷۷ — بیچ بانی جہاز (Screw-steamer) کا اپنے بیچ کے عمل کی

- (Heeling over) دھبے سے جھک جانا

(یہ فتویٰ مفتیہ گرین ہل) Prof Greenhill (سے مسوب ہے)

(۷۷) اگر انجن کو پھرانے والا جفت فٹ پونڈوں میں لی ہو اور فی گردشوں کی تعداد تو ایک منٹ میں جو کام ہوتا ہے وہ ۲۲ ن لی ہوگا۔ لیکن اگر انجن طے ایسی طاقت سے کام کر رہا ہو تو

$$b_{11} \dots = \kappa$$

۲۰۰۰ ... ۲۰۰۰

اگر طرہ ادیہ ہو جس میں سے جہاز چمک جاتا ہے اور مرکز ثقل کے ادیر پس مرکز ارتفاع ہو اور جہاز کا وزن ٹنوں میں ہو تو

۲۲۲۰ = وف جب ط

ب: ... ۲۳۳ = ۲۲ ن + ۲۲۰ و ف جب

اس مساوات سے طہ ملتا ہے۔
 جھکنے کے آخر کو وسطیٰ مستوی سے ج فاصلہ پر ایک ایسا وزن ور کھنے سے
 زائل کر دیا جاسکتا ہے کہ

$$و = ج = ل$$

$$یا ۲۲ ن ج و = ۳۳ ط$$

پنکھانی جہاز کی صورت میں جھکاؤ طولی سمت میں ہوگا اور اس صورت
 میں ف طولی، پس مرکزی ارتفاع ہوگا۔
 یہ قابلِ توجہ ہے کہ جبک جانے کی سمت گردش کے سمت کے مخالف
 ہوتی ہے۔ مثلاً پنکھانی جہاز کی صورت میں جو آگے کو جارہا ہے سا سینے کا حصہ
 خفیف سا اٹھا ہوا ہوگا اور پیچھے کا خفیف ڈوبا ہوا۔

۷۸۔ اچھال کی سطح بالعموم۔

فرض کرو کہ ابتدائی آب خط تراشش کے مرکز ہندسی میں سے گزرنے
 والے انتصابی خط میں مبدایا گیا ہے۔ اگر ابتدائی تراشش ی = ج ہو تو
 خفیف طور پر ہٹائے ہوئے محل میں اس مستوی کی مساوات ہوگی
 $ی = ج + ل + لا + م$
 جہاں ل، م چھوٹے ہیں۔

اگر ان دو محلوں میں (لا، با، ی) اور (لا، ما، ی) اچھال کے مرکوزوں
 کے محدود کو بتبیر کریں تو

$$ح (لا - با) = ل (ج - ی) لا فلا فرما = ل + ف + م$$

$$ح (لا - با) = ل (ج - ی) ما فلا فرما = ل + ب + م$$

$$ح (ی - با) = ل (ج - ی) لا فلا فرما = ل + ۲ ن ل م + ب م$$

$$جہاں لا = ل لا فلا فرما، ن = ل لا فلا فرما، ب = ل لا فلا فرما$$

اس لئے $۲(ی-ی) = ل(لا-لا) + م(ما-ما)$

یا $۲(ی-ی) = \frac{ح}{ب-ب} \{ ب(لا-لا) - ۲ف(لا-لا) (ما-ما) \}$

جو اجمال کی سطح کی تقریبی شکل ہے۔ اگر ابتدائی محور لا اور ما مستوی تراش کے صدری محور ہوں تو $ف = ۰$ اور اگر مبداء کو اجمال کے مرکز پر پہلے مقام منتقل کیا جائے تو سطح کی مساوات ہو جائیگی

$$۲ی = \frac{ح}{ب} + \frac{ح}{ا}$$

اب اگر ہم پس مرکزوں کی تعریف اس طرح کریں کہ وہ اجمال کی سطح کی صدری عمودی تراشوں کے مراکز اعمنائیں تو اجمال کے مرکز کے اوپر پس مرکزوں کے ارتفاع صدری نصف قطر انجا $\frac{۱}{ح}$ یا $\frac{۱}{ب}$ ہونگے۔

۷۹۔ قائمیت کی مشروط

اجمال کی سطح کے نقطہ (لا، ما، ی) پر عمودی مستوی ہے

$$طا-ی = \frac{ح}{ا} (ضما-لا) + \frac{ح}{ب} (عما-ما)$$

لہذا اس مستوی سے مجسم کے مرکز نقل (ب، ج، ح) کا عمودی فاصلہ ہوگا

$$\left\{ ی-ی + \frac{ح}{ا} + \frac{ح}{ب} \right\} \left\{ ۱ + \frac{ح}{ا} + \frac{ح}{ب} \right\} - \frac{۱}{۲}$$

$$= \left\{ ی + \frac{ح}{ا} + \frac{ح}{ب} \right\} \left\{ ۱ - \frac{ح}{ا} - \frac{ح}{ب} \right\} - \frac{۱}{۲}$$

$$= ی + \frac{ح}{ا} - \frac{۱}{۲} + \left(ی - \frac{۱}{۲} \right) \frac{ح}{ب} - \frac{۱}{۲}$$

اب دفعہ ۵۵ کی رو سے توازن کے محل ایک ایسے وزنی جسم کے توازن کے محل درامت کرنے کے معادل ہیں جو اچھال کی سطح سے محیط ہو اور ایک اتھی مستوی پر لگا ہوا ہو پس قائمیت کے لئے اس مستوی سے مرکز ثقل کا ارتفاع، قل، ہونا چاہیئے۔ اس کے لئے ضروری ہے کہ $\frac{1}{2}H$ اور $\frac{1}{2}H$ سے جی چھوٹا ہو یا مرکز ثقل دونوں پس مرکزوں کے نیچے واقع ہو۔

۸۰۔ تیراؤ کی سطح - لیکٹرٹ کا مسئلہ۔

فرمان کر کہ ٹھوس دفعہ ۸ کے بموجب دو سرے محل میں ہے اور اسکو دبانے سے غرق شدہ حجم میں ایک چھوٹی مقدار مفع ح کا اضافہ ہوتا ہے۔ اگر حجم مفع ح کی چسکائی کے مرکز ثقل کے محدود ضا، عا، طا ہوں ہو

$$\text{ضامفع ح} = (\text{ح} + \text{مفع ح}) (\text{لا} - \text{لا} + \text{مفع لا} - \text{مفع لا})$$

$$= \text{ل مفع} + \text{م مفع} + \text{دفعہ ۸}$$

(۹)

اسی طرح عا مفع ح = ل مفع + م مفع ب

$$\text{اور } \frac{1}{4} (\text{ل مفع} + \text{ل مفع} + \text{ل مفع} + \text{م مفع} + \text{م مفع} + \text{ب مفع})$$

نیز جیسے پستی کی موٹائی کم کر دی جاتی ہے نقطہ (ضما، عا، طا) تیراؤ کی سطح کے متناظر نقطہ پر منطبق ہونے کی طرف مائل ہوتا ہے یعنی آب خط رقبہ کے مرکز پر۔

اس لئے تیراؤ کی سطح پر روابط حاصل ہوتے ہیں

$$\text{لا} \times \text{فرح} = \text{ل فر} + \text{م فر}$$

$$\text{ما} \times \text{فرح} = \text{ل فر} + \text{م فر}$$

$$\text{جی} \times \text{فرح} = \frac{1}{4} (\text{ل فر} + \text{ل فر} + \text{ل فر} + \text{م فر} + \text{م فر} + \text{ب فر})$$

اور تیراؤ کی سطح کی مساوات ہوگی

$$۲ \text{ جی} = \frac{\text{فرح}}{\text{فرہ فرہ}} - (\text{فرہ}) \left\{ \frac{\text{لا}^2 \text{ فرہ}}{۲} - \text{لا}^2 \text{ فرہ} + \text{لا}^2 \text{ فرہ} \right\}$$

خاص صورت میں جبکہ فرہ = ۰ تو یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$۲ \text{ جی} = \frac{\text{لا}^2 \text{ فرح}}{\text{فرہ}} + \frac{\text{فرح}}{\text{فرہ}}$$

اور تیراؤ کی سطح کے نصف قطر انہیں $\frac{\text{فرح}}{۲}$ اور $\frac{\text{فرہ}}{۲}$ جیسا دہ ۵ ہے۔

حسم دیکھتے ہیں کہ ٹھوس کی دو متوازی تراشوں کے صدری ۰.۶ کا داری

ہونا ضروری نہیں ہے۔ اس طرح اگر $\text{فرہ} = ۰$ تو اس سے نتیجہ نہیں نکلتا کہ

$$\frac{\text{فرہ}}{\text{فرح}} = ۰.۶ \text{ اس طرح دفعہ ۵ کے نتائج صرف ان صورتوں میں ہی درست ہونگے}$$

جن کو اس دفعہ میں مان لیا گیا ہے یعنی تشاکل کے انتصابی مستوی موجود ہیں

جن میں افقی تراشوں کے تمام صدری محور واقع ہوتے ہیں۔

۸۱۔ پس مرکز کا مقام معلوم کرنے کی چند مثالیں درج کی جاتی ہیں۔

مثال ۱۔ نصف قطر اور طول ف کا ایک ٹھوس اسطواناتہ انتصابی محور کے ساتھ تیر رہا ہے۔

اس صورت میں تیراؤ کا مستوی ایک دائری رقبہ ہے اور

$$\text{دس} = \frac{\text{فرہ}}{۲} = \frac{\text{لا}^2 \text{ فرہ}}{۲} = \frac{\text{لا}^2 \text{ فرہ}}{۲} - \text{لا}^2 \text{ فرہ} + \text{لا}^2 \text{ فرہ}$$

$$\frac{\text{فرہ}}{۲} = \frac{\text{لا}^2 \text{ فرہ}}{۲} - \text{لا}^2 \text{ فرہ} + \text{لا}^2 \text{ فرہ}$$

$$\frac{\text{فرہ}}{۲} = \frac{\text{لا}^2 \text{ فرہ}}{۲}$$

لے لیگٹ کے مسلکی یقین اور گرسٹہ چند دعات کا طرز استدلال اور دعات آئیدہ ۹۱، ۹۲، ۹۳

۱۰۵، ۱۰۶ ڈاکٹر رام دے (Dr Bromwich) کے من فکر کا نتیجہ ہیں۔

اس لئے اگر محور کا طول F غرق ہو تو

$$\pi \times \text{اے} \times \text{ھم} = \frac{\pi}{\pi} \quad ; \quad \text{ھم} = \frac{\text{اے}}{\pi}$$

اور توازن قائم ہوگا اگر

$$\frac{\text{اے}}{\pi} < \frac{\text{ن}}{\pi} - \frac{\text{ن}}{\pi}$$

مثال ۲ — ایک دائری اسطوانہ تیرا ہے اسطور پر کہ اس کا محور افقی اور سیال کی سطح میں ہے۔ اس کو اس کے محور میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی میں ہٹا دیا گیا ہے۔

تیراؤ کا مستوی ایک مستطیل ہے اور

$$\text{اے} = \frac{1}{4} \text{اے}^2$$

جہاں ن اسطوانہ کا طول اور $\frac{1}{4}$ نصف قطر ہے

$$\therefore \text{ھم} = \frac{1}{3} \frac{\text{ن}}{\pi}$$

اور توازن قائم ہوگا اگر

$$\frac{\text{اے}}{\pi} < \frac{\text{ن}}{\pi} - \frac{\text{ن}}{\pi}$$

مثال ۳ — ایک ٹھوس مخروط انتصابی محور اور نیچے والے اس کے ساتھ

تیرا ہے۔

فرض کرو کہ F محور کا طول ہے،

ی محور کا وہ حصہ جو غرق ہے،

اور اے مخروط کا زاویہ راس ہے

$$\text{اے} = \frac{1}{\pi} \text{اے}^2 \text{مس} \text{اے}$$

$$و \quad ح = \frac{۱}{۲} ی ۲ مس ۲$$

$$۲ھم = \frac{۳}{۲} ی مس ۲$$

$$ھت = \frac{۳}{۲} ف - \frac{۳}{۲} ی$$

۱. اس لئے توازن قائم یا غیر قائم ہوگا بموجب اس کے کہ

$$ی مس ۲ < یا > ف - ی$$

یا
میں اگر $< یا > ف$ جم ۲
میں اگر $< یا > ف$ جم ۲ اور یہ میاں اور مخروط کی کٹافیتیں ہوں تو

$$\left(\frac{۱}{۲} ی ۲ \right) = \frac{۳}{۲} ف$$

اس لئے توازن قائم یا غیر قائم ہوگا بموجب اس کے کہ

$$\frac{۳}{۲} ف < یا > (جم ۲)$$

مثال ۴۔ ایک مستند سی الوجین مثلثی منشور تیر رہا ہے اس طور پر کہ

اس کا قاعدہ غرق نہیں ہے اور اس کے کنارے افقی ہیں۔
۱. توازن کے اس محل پر غور کرو جس میں منشور کا قاعدہ افقی سے
مائل ہو دیکھو دشت (۲۹)۔

اس صورت میں اگر اراق = ۲ م، اور لان = ۲ لا اور اگر صفحہ (۸۰) کی

مساحت (ب) میں ہم ۱۔ لکھیں تو لا اور م، مساواتوں

$$لا + م = ۲$$

$$لا = م$$

سے حاصل ہو رہا ہے۔

۲. اور الج کو حوالے کے محاور قرار دیے سے دشت اور ھ کے محدود

علا از ترتیب ہونے

اس لئے $ھم = \frac{۴}{۳} م$ جب $\frac{۲}{۳}$ اور $ھٹ = \frac{۴}{۳} (۵ - م)$ جم $\frac{۲}{۳}$

اور $ھم < ھٹ$ اگر جم $\frac{۲}{۳} > \frac{۴}{۳}$

اب دفعہ (۴۹) میں جس کا حوالہ پہلے دیا جا چکا ہے ہم نے ثابت کیا ہے کہ توازن کے یا تو تین محل ہونگے یا صرف ایک بموجب اس کے کہ

$$جم < \frac{۲}{۳} \text{ یا } > \frac{۲}{۳}$$

اس لئے نتیجہ نکلتا ہے کہ جب توازن کے تین محل ہوں تو درمیانی محل جس میں ج ب افقی ہے غیر قائم توازن کا محل ہوگا۔ اور دوسرے دونوں محلوں میں توازن قائم ہوگا۔

اگر توازن کا صرف ایک محل ہو تو توازن قائم ہوگا۔

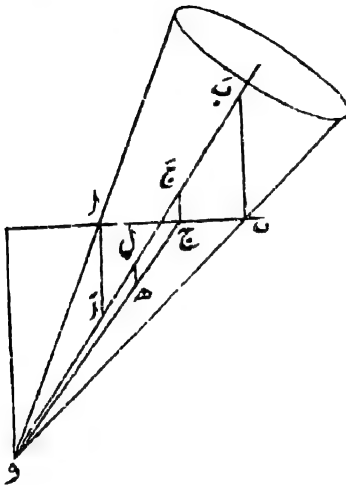
طالب علم کے لئے یہ اچھی مستحق ہوگی اگر وہ ان نتائج کو اجمال کے معنی کی مساوات معلوم کر کے اس کے مرکز اتحما کا مقام دریافت کرنے سے حاصل کرے۔

۸۲۔ محدود ہٹاؤ۔ اگر ایک ٹھوس جسم پانی میں تیر رہا ہو اور اس کو توازن کے محل سے ہٹا کر ایک دئے ہوئے زاوے میں کھایا جائے تو پہلے کی طرح سیالی دباؤ کا معیار استرادی ہی ہوگا یا غیر استرادی بموجب اس کے کہ نقطہ لی جس پر اچھال کے نئے مرکز میں سے گزرنے والا انتصابی خط، خط ھٹ کو قطع کرتا ہے ھٹ کے اوپر یا نیچے واقع ہو۔

اس سے یہ نتیجہ نہیں نکلتا کہ اگر ل ھٹ کے اوپر واقع ہو تو جسم کو آزاد کر دینے سے وہ اپنے اصلی محل کی طرف لوٹ آئیگا اور اس میں سے استرار کر لیا جائے کہ قائمیت کی ہمارے سابق تعریف کے بموجب اصلی محل قائم توازن کا محل ہوگا۔ علم حل کا ایک عام قانون یہ ہے کہ قائم اور غیر قائم توازن کے محل یکے بعد دیگرے وقوع پذیر ہوتے ہیں اور ممکن ہے کہ جسم اپنے اصلی محل سے اس ہٹاؤ میں توازن کے محلوں میں سے گزر چکا ہو۔

مثلاً ایک خاص مثال حسب ذیل ہے۔

ایک ٹھوس مخروط اس طرح تیرا ہے کہ اس کا محور انتصابی اور اس



نیچے دار ہے جس کو ایک انتصابی مستوی میں
زاویہ ط میں لکھایا گیا ہے۔ ہٹائے ہوئے
سیال کا حجم وہی رہتا ہے۔ سیالی دیاؤ
کے معیار کی سمت معلوم کرنا مطلوب ہے۔
فرغہ کر کے سیال کی مستوی سطح
سے حاصل شدہ مخروطی تراش کا محور اعظم
ا ب ہے اور اس کا وسطی نقطہ ج ہے،
خطوط ا ا، ب ب، ج ج خط ا ب
پر عمل القوا کرتے ہیں اور زاویہ ط و ب = آء
اور و ا = ز تو

$$\text{و ا} = \text{ط} - \text{ء}$$

$$\text{و ب ب} = \text{ط} - \text{ء}$$

$$\text{و ج} = \frac{1}{3} (\text{و ا} + \text{و ب}) = \frac{1}{3} \left\{ \text{و جب (ط - ء)} + \text{ج ب (ط - ء)} \right\} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\text{ج ب (ط - ء)}}{\text{ج ب (ط - ء)}} + \frac{\text{ج ب (ط - ء)}}{\text{ج ب (ط - ء)}} \right\}$$

$$= \frac{\text{د ج ب ط}}{\text{ب ج (ط + ء)}}$$

$$\text{و ل} = \frac{2}{3} + \frac{\text{ج ب ط}}{\text{ب ج (ط + ء)}}$$

تھیں ناقص ا ب کا نصف محور ان عمودوں کے درمیان وسط تناسب ہے
جو مخروط کے محور پر ا اور ب سے کھینچے جائیں۔

$$\therefore \text{ناقص کا رقبہ} = \frac{1}{3} \pi \text{ا ب (و ا} \times \text{و ب} \times \text{ج ب} \times \text{ء)}$$

$$= \frac{1}{3} \pi \left\{ \frac{\text{ج ب} \times \text{ج ب} \times \text{ء}}{\text{ج ب (ط + ء)}} \right\} = \frac{1}{3} \pi \left\{ \frac{\text{ج ب} \times \text{ج ب} \times \text{ء}}{\text{ج ب (ط + ء)}} \right\}$$

اس لئے ہٹائے ہوئے سیال کا حجم
 $= \frac{1}{2} \text{ حجم (ط - ع) (ناقص کا رقبہ)}$

$$= \frac{1}{2} \pi r^2 \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ حجم ع} \left\{ \frac{\text{حجم (ط - ع)}}{\text{حجم (ط + ع)}} \right\}$$

(۸۳) اب اگر سیال اور مخروط کی کثافتیں ρ_1 و ρ_2 ہوں تو چونکہ ہٹائے ہوئے
 سیال کا وزن مخروط کے وزن کے مساوی ہے اس لئے

$$\rho_1 \left\{ \frac{\text{حجم (ط - ع)}}{\text{حجم (ط + ع)}} \right\} = \rho_2 \left\{ \frac{\text{حجم (ط - ع)}}{\text{حجم (ط + ع)}} \right\} \quad \text{[ن مخروط کا ارتفاع ہے]}$$

$$\text{یا } \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right) = \left(\frac{\text{حجم (ط - ع)}}{\text{حجم (ط + ع)}} \right) \quad \text{[حجم ع]}$$

$$\text{اور } \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right) < \left(\frac{\text{حجم (ط - ع)}}{\text{حجم (ط + ع)}} \right) \quad \text{[حجم ع]}$$

$$\text{یا اگر } \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right) > \left(\frac{\text{حجم (ط - ع)}}{\text{حجم (ط + ع)}} \right) \quad \text{[حجم ع]}$$

طہ کو لا انتہا چھوٹا فرض کرنے سے صغیر ہٹاؤ کے لئے ہمیں قاعدیت کی
 شرط ملے گی

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right) < \left(\frac{\text{حجم (ط - ع)}}{\text{حجم (ط + ع)}} \right)$$

جو دفعہ (۸۱) کی مثال ۳ کے مطابق ہے۔

فرض کرو کہ مخروط کا توارن تبدیل ہے یعنی فرض کرو کہ

$$\rho_1 = \rho_2$$

تو محمد و ہٹاؤ کے بعد سیال کا عمل مخروط کو اپنے اصلی محل کی طرف لیجا۔ سنہ اہل ہرگا

اگر

جم + جم ط < ۱۰ (جم + ط) (جم - ط) - عہ

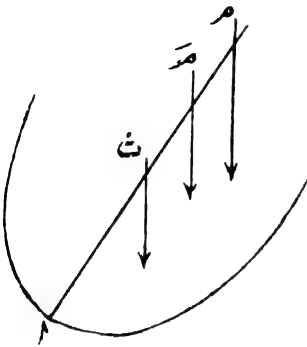
یہ ایک ایسی شرط ہے جو ہمیشہ صادق آتی ہے کیونکہ عہ اور ط میں سے ہر ایک زاویہ قائمہ سے کم ہے۔

اس لئے عہ و ط کے تبدیلی توازن کی صورت میں کسی محدود ہٹاؤ کے لئے توازن کو قائم کہا جاسکتا ہے۔

۸۳۔ جب مانع ایک برتن میں ہو جسکو اپنے اصلی محل سے ذرا سا ہٹا دیا گیا ہے تو گذشتہ تحقیقات کی مدد سے ہم حاصل کیجے وارڈ باؤ کے خط عمل کا تعین کر سکتے ہیں درحقیقت اس صورت میں پچھلی صورت کی طرح یہ مسئلہ حسب ذیل ہے۔
ایک ٹھوس جسم اب ج سے ایک دیا ہوا حجم ایک مستوی کے ذریعہ تراش لیا گیا ہے اس حجم کا مرکز ہندسی ہ ہے اور خط جھ اس مستوی پر عمود وار ہے۔ اگر وہی حجم ایک ایسے مستوی سے تراشا جائے جو مستوی اب سے بہت چھوٹا زاویہ بناتا ہے تو اس خط مستقیم کا محل معلوم کرنا مطلوب ہے جو دو سرے مستوی پر عمود وار ہے اور اس سے جو حجم کٹتا ہے اس کے مرکز ہندسی میں سے گزرتا ہے۔

اگر برتن کی اندرونی سطح ایسے مستوی کے لحاظ سے متشکل ہو جو ہٹاؤ میں سے گزرتا ہے اور تراش کے دونوں مستویوں کے خط تقاطع پر عمود وار ہے تو وہ خط جسکا محل دریافت کرنا مطلوب ہے جھ کو مرکز مابعد ہ پر قطع کرے گا جس کا مقام ہمارے گزشتہ نتائج سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

۸۴۔ برتن جس میں مانع ہو۔ ایک کھوکھلا برتن جس میں مانع ہے مانع (۸۴) میں تیرا ہے توازن کی نوعیت معلوم کرنا مطلوب ہے یہ فرض کر کے کہ جسم کی کمیت کے مرکز میں سے گزرنے والے ہٹاؤ کے انتصابی مستوی کے لحاظ سے جسم متشکل ہے اور یہ کہ جسم اور مانع کی کمیتوں کے مرکز ایک ہی انتصابی خط میں ہیں۔



درخت کر دو کہ ہٹائے ہوئے سیال
کا یس مرکز ہے اور برتن کے
اندرونی سیال کا ہر اور ہٹائے ہوئے
سیال کا درن ہے اور اندرونی سیال
کا و۔ برتن کی کیفیت کے مرکز کے
گرد معیار لینے سے، حاصل سامی دباؤ برتن
کو متوازن کرنے کا میلان رکھیں گے
یا اس کے برعکس بہ جب اس کے کہ
و × ت م۔ و × ت م
بہت باہمی ہو یہی موجب اس کے کہ

$$\frac{و}{ت} < ۱ > \frac{ت}{م}$$

مثال — ایک کھوکھلا مخروط جس میں پانی ہے پانی میں تیر رہا ہے اس طور پر
کہ اس کا محور متضانی ہے —

درخت کر دو کہ ف = مخروط کے محور کا طول
ف = مخروط کے اندرونی سیال میں ڈوبے ہوئے محور کا طول
ی = بیرونی سیال کی سطح کے نیچے ڈوبے ہوئے محور کا طول
ف = مخروط کے زاویہ راس کو ۲ عم لینے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$ھ م = \frac{۳}{۴} ی س ۲ ع$$

$$ھ ت = \frac{۳}{۴} ف - \frac{۳}{۴} ی$$

$$ت م = \frac{۳}{۴} ی ق ۲ ع - \frac{۳}{۴} ف$$

لہ یہ صورت ایسے جہاز سے متعلق ہے جس میں سوراخ ہو گیا ہو اور روکنا ہو۔ اگلی دفعہ ایسے
سہارا جہاز سے متعلق ہے جو سر کے لہاڑ اور pitch (کرنا ہے۔

اسی طرح ڈھ = $\frac{۳}{۴}$ ف قط' ع - $\frac{۲}{۳}$ ف

$$\frac{۳}{۴} = \frac{۲}{۳}$$

نیز اس لئے توازن قائم ہوگا اگر

$$\left(\frac{۳}{۴} \right) < \frac{۴ \text{ ف قط' ع} - ۸ \text{ ف}}{۴ \text{ ی قط' ع} - ۸ \text{ ف}}$$

جہاں مساوات

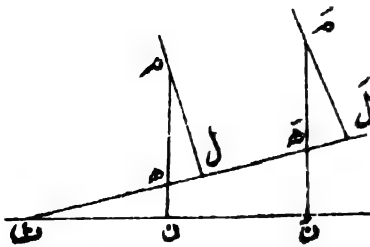
$$۰ = ۱ - \frac{۳}{۴} \text{ ج ڈھ} = \frac{۳}{۴} \text{ (ی - ف) ف} = \text{مخروط کا وزن}$$

سے ی حاصل ہوگا۔

۸۵۔ اگر برتن کے اندرونی سیال اور ہٹائے ہوئے سیال کی کمیتوں کے مرکز ایک ہی انتصابی مستوی میں نہ ہوں تو فرض کرو کہ ان مرکوزوں میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی کی سمت میں ہٹاؤ واقع ہوتا ہے اور جسم اس مستوی کے لحاظ سے متشکل ہے۔

فرض کرو کہ جسم کی کمیت کا مرکز ڈھ، ہٹائے ہوئے سیال کا مرکز ہ، برتن کے اندرونی سیال کا مرکز ہے اور ہر ہر پس مرکز ہیں۔

نیز فرض کرو کہ ڈھ، ہ، توازن کے محل میں افقی ہے اور متلاں ہٹائے ہوئے محل میں ڈھ سے کرنے والا افقی خط ہے۔



اگر وہی معنی ہوں جو گزشتہ دفعہ میں لئے گئے اور طہ ہٹاؤ کا زاویہ ہو تو توازن قائم یا غیر قائم ہوگا بوجب اس کے کہ

$$\left(\frac{۳}{۴} \right) < \frac{۳}{۴} \text{ ج ڈھ}$$

یا (ثانہ طہ + ن جب طہ) < یا > (دشان جم طہ + ن جب طہ)
 اور چکر و دشان = کر دشان
 اس لئے توازن قائم ہوگا یا غیر قائم بموجب اس کے کہ

$$\frac{P}{Q} < یا > \frac{R}{S}$$

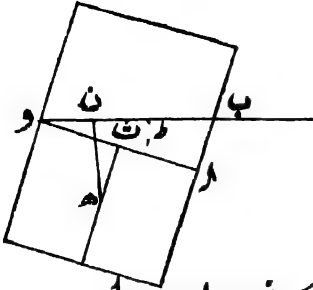
۸۶۔ قیود کے ماتحت تیرنے والے جسموں کے توازن کی قائمیت۔

قیہ کی ایسی صورتوں میں جس میں جسموں نے ہٹاؤ کے لئے ہٹائے ہوئے مانع کا حجم نہیں بدلتا پس مرکز کا نظریہ سیالی دباؤ کے خط عمل کا تعین کرتا ہے اور قائمیت کا سوال پھر آسانی سے حل ہو جاتا ہے۔
 مثال کے طور پر فرض کر دو کہ ایک جسم جزو عرق شدہ، ایک افقی محور کے گرد حرکت کر سکتا ہے اور یہ افقی محور اُس مستوی تراش کے مرکز ہندسی (ج) کے انتصاباً نیچے واقع ہے جو مانع کی سطح جسم میں کاٹی ہے۔

اگر جسم کو چھوٹے زاویہ طہ میں ہٹا دیا جائے تو اس ہٹاؤ کا یہ اثر ہوگا کہ مرکز ہندسی (ج) نیچے بیٹھ جائے گا اور یہ ہٹاؤ طہ پر منحصر ہوگا۔ اور اس لئے صغیر مقداروں کے پہلے رتبہ تک ہٹایا ہوا حجم غیر متغیر رہے گا اور پس مرکز وہی ہوگا گویا کہ ج مانع کی سطح میں ہی واقع ہے۔

اگر جسم ایسے افقی محور کے گرد حرکت کر سکتا ہو جو نقطہ ج کے نیچے انتصاباً واقع نہ ہو تو ہٹاؤ ہوئے حجم میں جو تبدیلی واقع ہوگی وہ نظر انداز نہیں ہو سکے گی اور قائمیت کے سوال کو ہٹاؤ ہوئے مانع کے عمل پر بالراست غور کرنے سے حل کرنا پڑے گا۔

مثال۔ ایک مستطیل پتہ ایک مائل سطح کی کثافت اکی کثافت کا دو چند ہے ساکن ہے اس طور پر کہ اس کے دو متعلق انتصابی ہیں۔ یہ پتہ اپنے ایک انتصابی ضلع کے وسطی نقطہ کے گرد اپنے مستوی میں حرکت کر سکتا ہے۔
 شکل پتہ کو تعبیر کرتی ہے جبکہ اسکو چھوٹے زاویہ او ب (طہ) میں ہٹا دیا گیا ہے۔ نقطہ وجوان کی سطح میں ہے ضلع کا وسطی نقطہ ہے۔



اگر $و = ۱$ اور اگر ارتفاع = ۲ بتو

$$اوب = \frac{۱}{۲} و ط$$

اور و کے گرد معیار لینے سے
توازن قائم ہوگا اگر

$$۲ ث \left(\frac{۱}{۲} و ط \times \frac{۲}{۲} + اوب \times ون \right) < ۲ \times و ب \times \frac{۱}{۲}$$

جہاں $ه$ ث نقطہ $ه$ میں سے گزرنے والا انتصابی ہے۔
یعنی چونکہ

$$ن و = و ث \text{ جم ط } - ه ث \text{ جب ط } = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} ط$$

توازن قائم ہوگا اگر

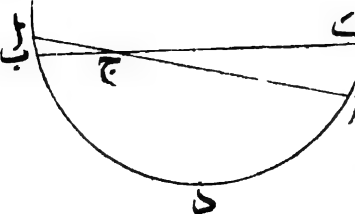
$$۲ و ۲ < ۳ ب ۲$$

۸۷۔ اس خاص صورت میں جبکہ جسم کی کثیت کا مرکز اور محور جس کے گرد یہ حرکت کر سکتا ہے دونوں مانع کی سطح میں واقع ہوں تو قائمیت کے تعین کے لئے ایک مضابطہ وفد (۶۸) کے مضابطہ کے مائل حاصل کیا جاسکتا ہے۔
جس محور کے گرد جسم حرکت کر سکتا ہے اس کو ج ۱ اور توازن کے محل میں ہٹاے ہوئے مانع کے حجم کو ح فرض کرو۔

فرض کرو کہ ا ج کر تیراؤ کا ابتدائی مستوی ہے اور ج ما کے گرد (جو کاغذ کے مستوی پر عمود دار ہے) ایک چھوٹے زاویہ میں ہٹانے کے بعد خط آ ب ج ب بن جاتا ہے۔

حاصل سیالی دباؤ، وزن ب د ا ب کے مساوی ہے جو اوپر وار عمل

کرتا ہے اور یہ ذیل کے وزنوں کے معادل ہے۔



وزن ا ب د یعنی ج ث ح جو اوپر کی طرف عمل کرتا ہے، فائدہ ا ب ج کا وزن جو اوپر کی طرف عمل کرتا ہے اور فائدہ ا ب ج کا وزن جو نیچے کی طرف عمل کرتا ہے

ان دونوں قانونوں کی وجہ سے استرودادی معیار

$$= \text{ج ح ت ل ا ط ف ر ل ا ف ر ا} = \text{ج ح ت ل ا ط}$$

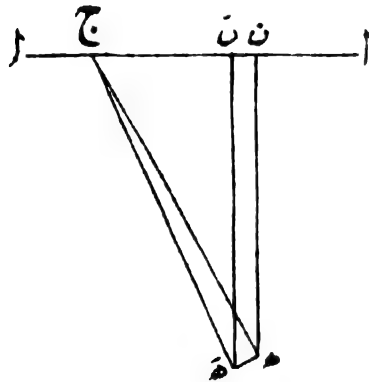
جہاں ج کے گرد رقبہ ل ج کے جوہر کا معیار ل ا ط ہے یہ کے
ہٹاؤ کی وجہ سے معیار کا نقصان

$$= \text{ج ح ت ل ا ط} = \text{ج ح ت ل ا ط} \times \text{ح ن} \times \text{ط}$$

اس لئے توازن قائم ہوگا اگر

$$\text{ل ا ط} \times \text{ح ن} = \text{ج ح ت ل ا ط}$$

(۸۷)



۸۸۔ ایسے جسم کی عام صورت میں : گ گہرائی پر کے ایک افقی محور کے گرد حرکت کر سکتا ہو فرض کرو کہ تیزاد کے مستوی پر محور کا نخل ج ا ہے اور ن اور ط کے نخل لی اور ن ہیں۔

معیر زادئی ہٹاؤ ط کے لئے ج کا انتصابی ہٹاؤ ط کے رتہ کا ہوگا اور اس لئے نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

گشتہ دفعہ کی طرح ہٹاے ہوئے مانع کے تینہ کی وجہ سے استرودادی

$$\text{معیار} = \text{ج ح ت ل ا ط} \times \text{اور ط کے ہٹاؤ سے معیار کا نقصان}$$

= ج ث ح × (ھ ن - گ) ط

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ توازن قائم ہوگا اگر

ج ث (س - ج ث ح (ھ ن - گ) + و (ث ل - گ)

مثبت ہو اس شرط کے ساتھ کہ

و × ج ل = ج ث ح × ج ن

نتیجہ صریح - اگر جسم متجانس مادے میں آزادانہ تیر رہا ہو اور تشاکل کا ایک ستوی رکھتا ہو اور اگر اس مستوی میں کسی افقی محور کے گرد جسم کو ایک صغیر زاویہ ط میں گھما دیا جائے تو استر دای جفت ہوگا

ج ث ط (س - ح × ھ ث)

جہاں تشاکل کے مستوی اور مانع کی سطح کے خط تقاطع کے گرد سطحی تراش کے جہود کا معیار (س) ہے۔

۸۹ - ایسے جسم کا توازن جو دو مائعات میں جزو غرق شدہ تیر رہا ہے۔ فرض کر دو کہ اوپر کے مانع کی کثافت ث اور نیچے کے مانع کی کثافت ۛ ہے۔

نیز فرض کر دو کہ کل حجم غرق شدہ ح ہے اور ح ، ح کا وہ حصہ ہے جو نیچے کے مانع میں غرق ہے۔ تیراؤ کے مستویوں کے رقبہ (ل) ، (ل) ہیں۔ تب جسم کے وزن کو تھانسنے والی قوتیں ، مانع کی کمیتوں کے اوزان ث ح اور ث ح ہیں جو ابر و اعلی کرتی ہیں۔

ایسی صورت لو جس میں جسم ایک ایسے انتصابی مستوی کے لحاظ سے متشاکل ہے جو ہٹاؤ کی مستوی پر عمود وار ہے ، اس طرح جسم اور کمیتوں ث ح اور ث ح کے مراکز ہندسی ث ، ھ ، ھ ایک ہی انتصابی خط میں ہونگے۔ اگر جسم کو ایک صغیر زاویہ ط میں تشاکل کے مستوی میں کسی افقی محور کے گرد ہٹا دیا جائے تو توازن کے محل پر لیجانے کا میلان رکھنے والی

(۸۸)

نوتوں کا کل سیارث کے گرو ہوگا

ح ث (ا س ر ا - ح * ہ ث) ط + ج ث (ا س ر ا - ح * ہ ث) ط

یا ج ث ح * ث م * ط + ج ث ح * ث م * ط

جس میں ث م اور ث م کی شت سمت ادبر وار ہے۔

تو اذن ضرر بجا قائم ہوگا اگر م اور م دونوں ث کے اوپر واقع ہوں لیکن اگر م، ث کے نیچے ہو تو قائمیت کے لئے

ث ح * ث م < ث ح * م ث

یا ت (ا س ر ا - ح * ہ ث) < ت (ح * ہ ث - ا س ر ا)

۹۰۔ غیر متجانس مالغ — ایک ٹھوس جسم متغیر کثافت کے مالغ میں تیر رہا ہے۔ اجمال کی سطح معلوم کرنا مطلوب ہے۔

پہلے ایک جسم کی صورت میں غور کرو جو ایسے مالغ میں تیر رہا ہے جو نزدیکی ترتیب میں مختلف کثافتوں ت، ث، ث، ث کی ہوں برشل ہے۔ فرض کر دو کہ ث کثافت کی تہ کی اوپر کی سطح کے نیچے جسم کا کل حجم غرق شدہ ح ن سے تعبیر ہوتا ہے۔

دفعہ ۸۷ کی طرح فرض کر دو کہ اس مستوی کی ابتدائی آب خط حراشی ج ہے اور فرض کر دو کہ خفیف طور پر ہٹا ہے ہوئے محل میں اس مستوی کی مسادات می = ج + ل + م ما ہے تو ہمیں یہ مسادات حاصل ہوتی ہے

{ ث ح + (ث - ث) ح + (ث - ث) ح + ... + (ث - ث) ح } (لا - لا)

= { ت ا + (ث - ث) ل + (ث - ث) ل + ... + (ث - ث) ل } ل

+ { ث ث + (ث - ث) ث + ... + (ث - ث) ث } م

اسی طرح (ا - با) اور (ی - می) کے لئے متناظر مساداتیں حاصل

ہوتی ہیں، یہاں ان دو محلوں میں اچھال کے مرکز بالترتیب (لا، با، ہی) (لا، ما، ہی) ہیں اور ا، افر، بر، متناظر آب خط تراش پر علی الترتیب دو ہرے سنگھلوں

کر لا فر لا فر ما ، کر لا فر لا فر ما ، کر لا فر لا فر ما

کو تعبیر کرتے ہیں۔

سلسل سیال کی صورت لینے سے

(۸۹)

ک (لا - لا) = ل + ف م

ک (با - با) = ف ل + ب م

اور ک (ہی - ہی) = ۱ (ل ل + ف ل م + ب م)

یہاں ک = ث ح + ج فر ث

= ث ح + [ث ح] - ث فر ح

= ث فر ح

اور (= ث و + ج فر ث

= ث و + [ث و] - ث فر و

= ث و ن + ث فر و

اور اسی طرح کا جلد ب کے لئے ہوگا۔ لاحتہ ان غرق شدہ جسم کی اندپر کی اور بجلی تراشوں سے متعلق ہیں، اس صورت میں ح ن سر کا صفر ہے اور اور ان بھی صفر ہے سوائے اس صورت کے جبکہ جسم کا پمپا چٹایا مستوی ہو۔ اچھال کی سطح تین مساواتوں سے دفعہ ۸ کی طرح حاصل ہوتی ہے اور خاص صورت میں جبکہ ف = ۰ ، اور مبداء اچھال کے مرکز کی متوازن

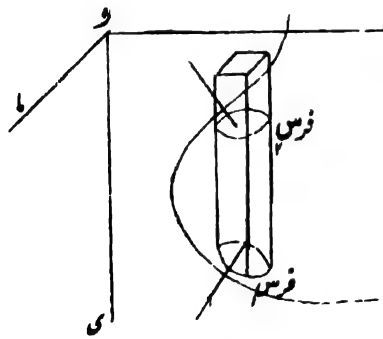
ا۔ $\frac{1}{2} = \text{کث فرا} / \text{کث فرح} = \frac{1}{2} \text{ ل}$

(۳) اسطوانہ جس کا محور انتصابی ہے۔

یہاں ۱ = مستقل، اس طرح $\frac{1}{2} = \text{شان لان} / \text{ک}$

۹۳۔ توانائی بالقوہ۔ تیرنے والے اجسام کے توازن کی قائمیت کے نظریہ کی بنیاد توانائی کے اصول پر بھی رکھی جاسکتی ہے۔ اور اس نقطہ نظر سے ہم اس مضمون پر اب بحث کرتے ہیں۔

وزن دار مائع کے ایک سمندر میں ایک جسم کو داخل کرنے میں جو کام ہوتا ہے اس کو معلوم کرنا مقصود ہے جبکہ جسم کے دخول سے مائع کی ہموار سطح میں جو تبدیلی ہوتی ہے اور اس میں جو خلل ہوتا ہے ان کو نظر انداز کر دیا جائے۔ اگر عمودی تراش فرلا فرما کا ایک انتصابی منشور، جسم کے حدود کو جہاں



مائع اسے مس کرتا ہے عناصر فرس، فرس میں قطع کرے جو سی، یا گہرائیوں پر ہیں اور جن پر کے دباؤ علی الترتیب ۱، ۲، ۳ ہیں اور اگر ط، طم وہ حادثہ زاو ہوں جو فرس، فرس پر کے عماد انتصابی خط کے ساتھ بناتے ہیں تو گہرائی کو بقدر ایک صغیر مقدار فری کے بڑھانے میں، ان عناصر پر کے مجموعی دباؤں کے خلاف جو کام ہوتا ہے یہ ہے

(۱) فرس جم ط - ۲ فرس جم ط (فری = (۱ - ۲) فرلا فرما فری

اس لئے زیر بحث محل میں جسم کو رکھنے میں جو کام ہوا وہ

= { فرلا فرما (۱) ۲ فری - (۲) ۲ فری } {

جہاں جسم کی سطحی تراش کا رقبہ Δ اور ω کے گرد اس کی گردش کا نصف قطر r ہے۔

اس سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ توازن قائم ہوگا اگر

$(\Delta r^2 \times C \times h) = (\Delta r^2 \times C \times h)$

فرقہ $\frac{C}{r^2} = C \times h$ (اے - ح) \times (دھ - ث)

۹۵۔ اگر ہٹائے ہوئے مائع کا حجم مستقل ہو اور اگر ہٹائے ہوئے محل میں اچھال کے مرکز میں سے گزرنے والا انتظامی خط کھٹ کو نقطہ مرا میں قطع کرے تو مرا کو مرکز ابعدا پس مرکز کہتے ہیں۔

پس مرکز کے وجود کے لئے تخلیلی شرطیں یہ ہیں

$(\Delta r^2 \times C \times h) = (\Delta r^2 \times C \times h)$ فرلا فرما =

یعنی گردش کا محور ω سطحی تراش کے مرکز ہندسی میں سے گزرنا چاہیئے۔

(دفعہ ۵۲ کے ساتھ مقابلہ کرو)۔ اور چونکہ اچھال کا نیا مرکز، مستوی لاوی میں ہونا چاہیئے اس لئے

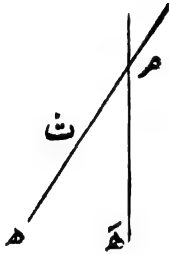
$(\Delta r^2 \times C \times h) = (\Delta r^2 \times C \times h)$ فرلا فرما =

لیکن $(\Delta r^2 \times C \times h) = (\Delta r^2 \times C \times h)$ فرلا فرما =

۱۔ بعض علماء لفظ پس مرکز کو ذرا وسیع معنوں میں استعمال کرتے ہیں چنانچہ پس مرکز کی تعریف وہ اس طرح کرتے ہیں کہ وہ نقطہ ہے جہاں اچھال کی سطح کے دو متصل عمادوں کی درمیانی اقل فاصلہ ان عمادوں میں سے ایک کو قطع کرتا ہے۔

(۹۳)

یعنی محور واسطی تراش کا صدی محور ہونا چاہیے۔
اس صورت میں یہ ظاہر ہے کہ اگر ہر ، فٹ کے اوپر واقع ہو تو جسم کے وزن اور حاصل سیالی دباؤ سے بنا ہوا جنت جسم کو واپس توازن کے محل پر لچائیگا میلان رکھے گا اور



$$\begin{aligned} &= ج \text{ ث } ح \times \text{ف} \times م \times ط \\ &= ج \text{ ث } ح (\text{ه} \text{ م} - \text{ه} \text{ ث}) ط \\ &= \text{ه} \text{ م} = \frac{\text{ط} \times \text{ح}}{\text{ح}} \text{ اور توازن قائم} \end{aligned}$$

یا غیر قائم ہوگا بموجب اس کے کہ م ،
ث کے اوپر ہو یا نیچے۔

جو کنڈیس مرکز اچھال کی سطح کے متصل عمادوں کا نقطہ تقاطع ہے اسلئے
عام طور پر ہر کی سطح کے صدی انکنا کے دو مستویوں میں اگر ہٹاؤ لئے جائیں
توان کے جواب میں دو پس مرکز ہونگے۔ اور اچھال کی سطح کا ایک صدی
نصف قطر انکنا ہر ہے۔

۹۶۔ مقید اجسام۔ ایک تیرنے والا جسم ایک ثابت افقی محور کے گرد گھومنے
پر مجبور ہے۔ اس صورت پر دفعہ (۹۴) کی طرح غور کیا جاسکتا ہے۔

اگر و ما ثابت محور ہو اور (ضنا، عا، طا)، (لا، ما، تی) علی الترتیب
ث اور ه کے محدد ہوں اور م جسم کا وزن ہو تو توازن کی شرط ہوگی
ج ث ح لا = و ضنا

اگر گردش کا محور تیراؤ کے مستوی میں ہو اور جسم کو ایک صغیر زاویہ
طہ میں گھمایا جائے تو مٹائے ہوئے مانع کی وجہ سے توانائی بالقوہ میں اضافہ

$$= \frac{1}{4} ج \text{ ث } ط (\text{لا} - \text{ح} \text{ تی}) + ج \text{ ث } ط ح لا$$

اور جسم کے ہٹاؤ کی وجہ سے نقصان

$$= - \frac{1}{4} ط \text{ و } ط ا + ط \text{ و } ضنا$$

اس لئے توانائی بالقدہ میں کل زیادتی

$$= \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

اور توازن قائم ہو گا بشرطیکہ

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

۹۷۔ اگر گردش کا محور و گ گہرائی پر ہو اور تیراؤ کے مستوی پر اس کے ظل کو ہم محور مانیں اور اوپر کی طرح فرض کریں کہ محاور جسم کے ساتھ حرکت کرتے ہیں تو بقدر $\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$ گ گ کے نیچے اترتا ہے اور ہٹائے ہوئے

مانع کی وجہ سے توانائی بالقدہ میں اضافہ

$$= \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \text{ فلا فرما}$$

$$- \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

$$= \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \text{ فلا فرما}$$

$$= \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \text{ فلا فرما}$$

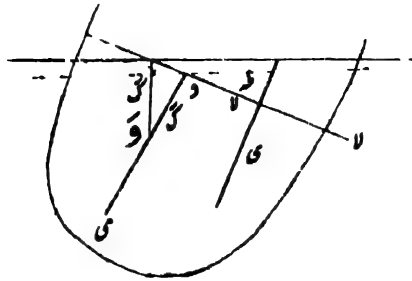
اور جسم پر جاذبہ ارض نے جو کام کیا وہ

$$= \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \text{ فلا فرما}$$

اس لئے کل بیرونی کام جو ہوا وہ

$$= \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \text{ فلا فرما}$$

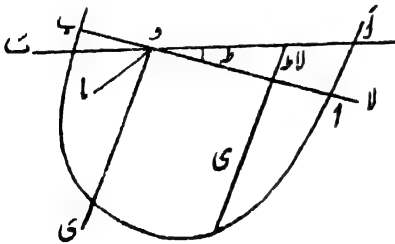
جہاں سطحی تراز کا رقبہ ہے اور تیراؤ کے مستوی پر ثابت محور کا جو ظل ہے اُس کے گرد اس کی گردش کا نصف قطر مہا ہے۔



قائمت کے لئے شرط ہے -
 (ح-تی-گ) - (ج-ٹ) (طا-گ)

۹۸ - غیر متجانس مانع - ایک جسم غیر متجانس مانع میں تیر رہا ہے، تیراؤ کے
 مستوی میں کے کسی خط کے گرد اس کو گھمانے میں جو کام کیا جاتا ہے اسے معلوم کرو -
 دفعہ (۹۴) کی طرح محاورہ اور وہی ترقیم استعمال کرو - ہم لے سکتے ہیں
 ت = ف (ی) لیکن فرد = ج ت فری

∴ د = ج { ف (ی) - ت (۰) }



دفعہ (۹۴) کے بموجب
 جسم کو کسی محل میں مانع کے
 اندر داخل کرنے میں جو کام
 کرنا پڑتا ہے وہ
 لڑ لڑ و فر لا فری ہے
 جہاں تکمیل غرق شدہ حجم
 پر لیا گیا ہے - جسم کو جب
 ایک صغیر زاویہ طہ میں گھلایا
 جائے تو یہ کام ہو جائیگا

[[لا فرلا فرما فری + لا فرلا فرما فری] لا ط

جہاں عنصر فرلا فرما فری پر کیا یاد آئے اور پہلے مکمل کی وسعت دہی ہے جو پہلے تھی لیکن دوسرا مکمل فائز (و) ب و ب کے اندر لیا گیا ہے۔

(۹۵)

د = ح { ف (ی) - پ (ی ط + لا ط) - ت (و) } {

= د + ج (لا ط - پ (ی ط) ف (ی) + پ (ح لا ط) ت (ی) }

[[لا فرلا فرما فری = [[لا فرلا فرما فری] د + ج ط لا - پ ج ط ای ت - لا فری] لا فرما فری

فائزوں سے متعلق تکملہ میں ہی ہر جگہ لا ط اور د کے ملے بالا میں ط کی صرف پہلی نوٹ برقرار رکھنے سے

د = ح { ف (ی) - ت (و) + لا ط ت (ی) } {

= ج { ی ف (و) + لا ط ت (ی) }

∴ لا فری = ج { - پ (ط لا ت (و) + لا ط ت (و) - لا ط ف (لا ط) }

= پ (ح لا ط ت (و) = پ ج ت لا ط

اس لئے بناؤ پیدا کرنے میں مانع کے دباؤں کے خلاف جو کام ہوا وہ تو انسانی بافتور میں اٹھتا ہے اور

ج ط لا لا لا فرما فری - پ ج ط لا فری (لا فری) لا فری

+ پ ج ت لا فرما

لیکن جسم کے وزن نے جو کام کیا وہ

مستقل کمیت کے لئے شرط یہ ہے

[[[ک (ی + لا ط) فرلا فرما فری + [[ک ث لا ط فرلا فرما = [[ک ث (ی) فرلا فرما فری
یا [[[ک (ث + لا ط فری) (فرلا فرما فری + ث لا ط فرلا فرما = [[ک ث فرلا فرما فری
یا [[[ک لا فری فرلا فرما فری + ث لا ط فرلا فرما = .

اور دوسری شرط کے لئے ضروری ہے کہ

[[[ک (ی + لا ط) ما فرلا فرما فری + ث لا ط لا فرلا فرما = .

لیکن

[[[ک (ی) ما فرلا فرما فری = .

∴ یہ شرط ہو جاتی ہے

[[[ک لا فری فرلا فرما فری + ث لا ط لا فرلا فرما = .

دونوں شرطیں پوری ہونگی اگر محوری کے گرد تشاکل ہو۔ یا اگر مستوی ماوی
میں کے تمام افقی خطوط، متناظر افقی ترشوں کے ہندسی مرکزوں میں سے گزرنوالے
صدری محور ہوں اس طرح کہ تمام گہرائیوں پر

[[[ک لا فرلا فرما = . اور [[ک لا فرلا فرما = .

جب یہ شرطیں پوری ہوں اور مرکز ہو تو استراوی جنت

و × ت م × ط یا و (ھ م - ھ ث) ط

= ط { ج ث ا س ا ج ک ث فری (ا س ا) فری - و ھ ث } ط

$$\therefore \text{ج} = \text{ج} + \text{ک} + \text{ر} + \text{ف} + \text{ز} + \text{ی}$$

جہاں تکمیل زیر ترین تہوار سطح سے سطحی تراش تک لیا گیا ہے۔

- ۱۰۰۔ چونکہ دفعہ (۹۳) کا نتیجہ (۱) درست ہے خواہ جسم مانع کے نیچے نکلا ہوا ہو یا نہ نکلا ہوا اس لئے گزشتہ دو دفعات کے نتائج بھی ہر ایک صورت میں درست ہیں اور چونکہ دفعہ (۹۴) کا جلد (۱) دفعہ (۹۸) کے جلد (۱) کی صورت ایک خاص صورت ہے اس لئے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ متجانس مانع کے لئے بھی حاصل شدہ نتائج درست ہیں خواہ جسم مانع کے نیچے نکلا ہوا ہو یا نہ ہو۔
- ۱۰۱۔ کلاً غرق شدہ جسم۔ ایک جسم غیر متجانس مانع میں کلاً غرق شدہ

تیر رہا ہے۔ اس کو کسی افقی محور کے گرد

ایک تغیرزا دے میں گھمانے میں

جو کام کیا جاتا ہے اسے معلوم کرو۔

اوپر کی طرح و ما کو گردش کا محور

لو اور فرض کرو کہ محاورہ و لاوی

جسم میں ثابت ہیں۔ نیز فرض کرو

کہ و ما کی گہرائی گ ہے اور

ث = ف (گہرائی)

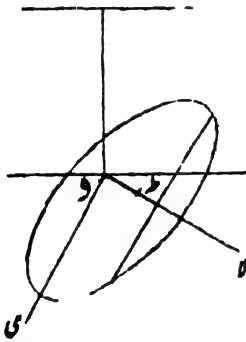
اس طرح توازن کے محال میں

$$\text{ج} = \text{ج} + \text{ک} + \text{ر} + \text{ف} + \text{ز} + \text{ی}$$

اور ہٹائے ہوئے محل میں

$$\text{د} = \text{ج} + \text{ف} + \text{ی} + \text{ط} + \text{گ} + \text{لاط} - \text{ف} + \text{ز} + \text{ی}$$

$$= \text{ج} + \text{لاط} - \text{ط} + \text{ی} + \text{ف} + \text{ج} + \text{لاط} + \text{ر} + \text{ف}$$



و ما کے گرد جسم کو ایک صغیر زاویہ طہ میں گھمانے میں جو کام مانع کے دباؤں کے خلاف کرنا پڑتا ہے وہ

$$= \{ (د - د) \text{ فرلا فرما فری} \} \quad [\text{دفعہ (۹۳)}]$$

$$= \{ \text{ج ط} \} \text{ لات فرلا فرما فری} + \frac{1}{4} \text{ ج ط} \{ \text{لا} \} \text{ فری} - \{ \text{ثی} \} \text{ فرلا فرما فری}$$

جہاں تکمیل ہٹاے ہوئے مانع کی کل مقدار کے اندر لیا گیا ہے۔ لیکن ہٹاؤ میں جسم کے وزن نے جو کام کیا وہ

$$= \{ \text{طا} ۱ - \frac{1}{4} \text{ طا} \} + \{ \text{ضنا ط} - \text{طا} \}$$

جہاں پہلے کی طرح جسم کی گتیت کے مرکز ثقل کے محدد (ضنا، طا) ہیں۔

$$\text{اور } \{ \text{ضنا} - \text{لا} \} \text{ لات فرلا فرما فری}$$

اس لئے ہٹاؤ میں کل کام تو کیا وہ

$$= \frac{1}{4} \text{ ط} \{ \text{ج} \} \{ \text{لا} \} \text{ فری} - \{ \text{د} - \text{جی} \} \text{ طا}$$

$$= \frac{1}{4} \text{ ط} \{ \text{ج} \} \{ \text{لا} \} \text{ فری} - \{ \text{فری} \} \text{ فرلا فرما فری} - \{ \text{ھ} \} \text{ ث}$$

$$= \{ \text{ط} \} \{ \text{ج} \} \{ \text{لا} \} \text{ فری} - \{ \text{د} - \text{جی} \} \text{ طا}$$

جہاں تکمیل جسم کے بلند ترین نقطہ سے زیر ترین نقطہ تک لیا گیا ہے۔

(۹۸)

۱۰۲۔ توارن قائم ہوگا اگر جملہ بالا مثبت ہو۔ یس مرکز کا مقام جبکہ اُس کا وجود ہو ادھر کی طرح معلوم ہو سکتا ہے۔ پس اگر مرکز یس مرکز ہو تو استرادی جنت

$$\{ \text{ھ} \} \text{ م} \times \text{ط یا } \{ \text{ھ} - \text{ھ} \} \text{ ث}$$

$$= \{ \text{ج} \} \{ \text{لا} \} \text{ فری} - \{ \text{د} - \text{جی} \} \text{ طا}$$

$$\{ \text{ھ} - \text{ھ} \} \text{ م} = \{ \text{ج} \} \{ \text{لا} \} \text{ فری}$$

یا $\text{ہم} = \text{ج} + \text{ا} + \text{ب}$ - (ا، ب، ث) - کرٹ فری (ا، ب، ث) فری {

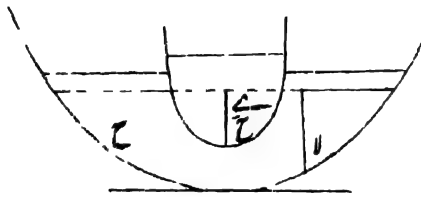
جہاں ا، ب، ث اور ا، ب، ث جسم کی زیر ترین اور بلند ترین افقی تراشوں سے متعلق ہیں اور مکمل بلند ترین نقطہ سے زیر ترین نقطہ تک لیا گیا ہے۔
اگر جسم اپنے بلند ترین یا زیر ترین نقطہ پر چپٹا نہ ہو تو ہم لکھ سکتے ہیں

$\text{ہم} = \text{کرٹ فری} + \text{ا} + \text{ب}$ / فری / کیت

جہاں مکمل زیر ترین نقطہ سے بلند ترین نقطہ تک لیا گیا ہے۔

۱۰۳۔ ایک ٹھوس جسم کو مائع میں ڈبوئے سے توانائی بالقوہ جمع ہو جاتی ہے۔

اگر ایک ٹھوس جسم ایک برتن میں جس میں مائع ہے ڈوبا جائے تو کام ہوتا ہے اور اس لئے مائع کے مرکز ثقل کے اوپر اٹھ آنے سے توانائی بالقوہ حاصل ہوتی ہے۔



فرض کرو کہ مائع کی گہرائی لا ہے جسم کے غرق شدہ حصہ کی گہرائی ہی ہے برتن اور ٹھوس جسم کی متناظر قوی تراشیں کا اور مے ہیں، مائع کا حجم ح ہے اور ٹھوس جسم کے غرق شدہ حصہ کا حجم ج ہے۔ تب

$\text{ح} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج}$ - (ا، ب، ج) - فری

اور توانائی بالقوہ میں اضافہ ج ث ح لا کے تغیر کے مساوی ہے جبکہ

یہ تسمیہ لائیں اضافے مف لا کی وجہ سے پیدا ہو۔

ج ث = ۱ المکر یہ تغیر

= لا لا مف لا - (مف لا - مف ی) ح - (لا ی) سے مف ی - سے ی مف ی

اب چونکہ
ح = لا لا فرلا - (ی سے دی

اس لئے لا مف لا = سے مف ی

اس لئے تغیر = ح (مف ی - مف لا)

یہ نتیجہ اس بات کو زیر نظر رکھ کر بھی فوراً حاصل ہو سکتا ہے کہ ح ٹھوس جسم پر کے حاصل انتصابی دباؤ کے مساوی ہے اور مائع کے چڑھاؤ مف لا کی وجہ سے جسم کا اٹھار مف ی - مف لا ہے۔

۱۰۴۔ ایک اسطوانی برتن کے اندر کچھ مائع ہے، ایک جسم اس مائع کے اندر تیر رہا ہے، جسم کی توانائی بالقوہ۔

جسم کو داخل کرنے لے پیشتر برتن کے اندر جو مائع ہے اس کی سموریا ساکن سطح کو شمار کی صفر سطح مانو۔ فرض کرو کہ برتن کی سموی تراش با ہے اور جسم کی آب اس جبکہ جسم رہا ہو ہے۔ فرض کرو کہ توازن کے محل میں غرق شدہ حجم ج ہے۔ ج ث = ۱ لینے سے ج جسم کے وزن کو بھی تعبیر کرتا ہے۔ فرض کرو کہ کسی دوسرے محل میں غرق شدہ حجم ج ہے۔ اس منوالہ کر محل میں یانی کی ہوا سطح بقدر فاصلہ سطح کے اوپر اٹھ جائیگی۔ پس اگر صفر سطح کے نیچے اچھال کے مرکز کی گہرائی گ ہو تو وزن ح بقدر گ + ج کے مساوی بلندی کے اوپر اٹھا دیا گیا ہے اور کام جو ہوا وہ ح گ + ج کے مساوی ہے۔ اس لئے اگر صفر سطح کے اوپر جسم کے مرکز ثقل کا ارتعاش ق سے بعیر ہو تو حل توانائی بالقوہ ہوگی

ج ق + ح گ + $\frac{ج}{۲}$

اب فرض کرو کہ $C = C + C$ اور فرض کرو کہ ہٹائے ہوئے محل میں جسم کے حجم C کے مرکز ہندی کی گہرائی g ہے اس طرح $Cg = Cg + Cg$ صفا

جہاں صفا $= \frac{C}{\rho_s} - \frac{C}{\rho_b}$ بشرطیکہ C چھوٹا ہو۔ تو آئی بالنتوہ ہوگی

$$C(ن + گ) + C \left\{ \frac{C}{\rho_s} - \frac{C}{\rho_b} \right\} + \frac{C}{\rho_b}$$

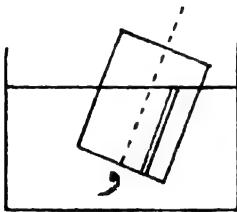
$$= C(ن + گ) + C \left(\frac{C}{\rho_s} - \frac{C}{\rho_b} \right) + \frac{C}{\rho_b}$$

$$= C \left(\frac{1}{\rho_s} - \frac{1}{\rho_b} \right) + مستقل$$

(۱۰۰) جہاں ρ اس انتصابی فاصلہ کو تعبیر کرتا ہے جو مرکز ثقل اور اچھال کے مرکز کے درمیان ہے۔

۱۰۵۔ مثال۔ ایک اسطوانہ دوسرے اسطوانہ میں تیر رہا ہے۔ تیرنے والے اسطوانہ کے قاعدہ کے

مرکز ہندی کو سبب و لو اور فرض کرو کہ قاعدہ کا رقبہ A ہے۔ نیز فرض کرو کہائع کی سطح کے مستوی کی مسادات



$L + M + N = C$ ہے جہاں اوپر وار انتصابی خط کی سمتی جیوب التمام L, M, N ہیں۔

تب $C = \frac{L}{\rho_s}$ اور اگر توازن کے محل میں اچھال کے مرکز کا

مقام h ہو تو $h = \frac{L}{\rho_s}$ کا ظل اوپر وار انتصابی پڑ ہوگا

$$\frac{1}{C} \left(L + M + N \right) = \frac{1}{\rho_s} \left(N + Y \right) \text{ فرلا فرما}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (ع + ل + م + ا) \right) \frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \text{ فرلا فرما} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \right) \frac{1}{2} (ع + ل + م + ا) \text{ فرلا فرما} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \right) \frac{1}{2} (ع + ل + م + ا) \text{ فرلا فرما} \\
 &\text{جہاں } ع = ل = م = ا \text{ فرلا فرما، جہاں } ع = ل = م = ا \text{ فرلا فرما} \\
 &\text{اور تکمیلے عمودی تراش پر لے گئے ہیں۔}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{نیز اگر جسم کے مرکز نقل ثقل کے محدد ۱، ب، ج ہوں تو ہم دیکھتے ہیں کہ} \\
 &\text{ح. ط. ج. (ل + م + ب + ن ج) - (ع - ل - م - ا) (ع + ل + م + ا) جہل م} \\
 &\text{اور م = } \frac{1}{2} \text{، اس طرح توانائی بالقوہ ہوگی} \\
 &\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \right) \left(\frac{1}{2} (ع + ل + م + ا) \right) + \frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \left(\frac{1}{2} (ع + ل + م + ا) \right) \\
 &\text{مستقل}
 \end{aligned}$$

مثلاً فرض کر دو کہ ۱ = ب = ۰، اس طرح ث، مرکز ہندسی کے خط دی

پرواقع ہوگا۔ لکھو ح = اف جہاں ث انتصابی محل میں ڈوبنے کی گہرائی ہے
تب توانائی بالقوہ ہوگی

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \right) \left(\frac{1}{2} (ع + ل + م + ا) \right) + \frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \left(\frac{1}{2} (ع + ل + م + ا) \right) \\
 &\text{ایسی صورت میں جبکہ اسطوانہ تقریباً انتصابی ہو ہم تقریباً ن = ۱ - (ل + م)} \\
 &\text{رکھتے ہیں۔ اور ل اور م کے سر جو جاتے ہیں}
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \right\} \left\{ \frac{1}{2} (ع + ل + م + ا) \right\} + \left\{ \frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \right\} \left\{ \frac{1}{2} (ع + ل + م + ا) \right\}$$

یس قانیت کے لئے $\frac{1}{p}$ (فنا - ج ۲ - ف) کو لازماً تراش کے حمود کے کم سے کم میاں سے کم ہونا چاہیئے۔

مزبور برائے اگر تراشیں دائرہ یا کوئی ایسی شکل ہو جس کے لئے $e = 0$ ہوگی تو توانائی بالحدود ایسے محل میں جس میں مقرر انقباضی کے ساتھ زاویہ طے بنتا ہو رہے گی۔

$$\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} \times \text{حجم اوت (ج-ن)} + \frac{1}{4} \times \frac{\text{حجم ط}}{\text{حجم ز}}$$

ہٹا دے ہرے حجم کو مستقل لینے سے $H = 0$ ، اس طرح انوکھوں میں توازن کے لئے لازماً

- الف (ج ۲ - ف) + ع (۲ + مس ۲ ط) = .

جس سے طہ کی ایک حقیقی قیمت ملتی ہے جبکہ

الف (ج - ف) < م

یعنی جبکہ انتصابی کل غیر قائم ہے۔

المشاور

۱۔ پانی سے بھاری شے کا ایک برتن ہے جس کو اوندھا کر کے پانی کی سطح پر رکھا گیا ہے، اس میں اتنی کافی ہوا ہے کہ وہ تیر سکتا ہے۔ اگر اسکو کچھ فائنلے میں پانی کے اندر ڈرا لیجئے ڈیکھ لیا جائے تو ثابت کرو کہ وہ توازن کے ایسے محل میں ہوگا جو انتصابی بناؤ کے لئے غیر قائم ہے۔

۲۔ ایک ٹھوس مکافی نما اسپنچ محور پر ایک ملودار ستوی سے محدد و سببہ۔ اگر یہ تیرا ہو اس طور پر کہ اس کا محور انتصابی ہو اور اس میں پانی میں غرق ہو تو ہٹائے ہوئے مانع کے مرکز نقل کے اوپر پس مرکز کار تقاطع و تفرع خاص کے نصف کے مساوی ہوگا۔

۳۳۔ ایک مخروط جس کا زاویہ راس ۹۰° ہے پانی میں اس طرح تھیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور راس نیچے کی طرف ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا بیس مرکز

نیراؤ کے مستوی میں واقع ہوگا اور اس کا توازن قائم ہوگا بشرطیکہ اس کی کثافت
اصنافی $\frac{2}{3} < \frac{2}{3}$ -

۴ — ایک متساوی الساقین نانہ اس طرح تیار ہائے کہ اس کا قاعدہ افقی ہے
اور اس کی دھاریا پانی میں غرق ہے۔ ثابت کرو کہ ایسے بیٹاؤ کے لئے جو دھار
کے علی القوائم مستوی میں وقوع پذیر ہو توازن قائم ہوگا اگر فانہ کی کثافت اور
سیال کی کثافت کی باہمی نسبت اس نسبت جسم ۴ء : اسے بڑی ہو جہاں ۲ء
مانہ کا زاویہ ہے

۵ — ایک بند اسطوانی ظرف برت سے ایک چوتھائی بھر دیا گیا ہے۔ اور
استعمابی محور کے ساتھ پانی میں اسے تیرنے کے لئے چھوڑ دیا گیا ہے ظرف کا
وزن اس پانی کے وزن کا ایک چوتھائی ہے جو اس میں ساکتا ہے۔ برت کے
پہلے سے پہلے اور بعد توازن کی نوعیت کی جانچ کرو۔ جبکہ تپش کی تبدیلی کی وجہ سے
ہم کی تبدیلی نظر انداز کر دی جائے۔

۶ — ایک بٹھوس جسم دو ہرے مخروط کی شکل کا ہے اور دو مساوی دائری
رخوں سے محدود ہے اور اپنے سے دو چند کثافت کے ماتع میں افقی محور کے ساتھ
تیر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا یا غیر قائم اگر نصف زاویہ راس بالترتیب
۹۰ سے کم ہو یا زیادہ۔

۷ — ایک اسطوانی جہاز کی عمودی تراش، ال وتر خاص کے دو مساوی مکافیل
کی دو مساوی توئیں ہیں جو پینڈے پرس کرتی ہیں، پینڈان مکافیوں کا مشترک
راس ہے اور اس طرح جہاز کے پہلو بلحاظ پانی کے متعہ ہیں۔ جہاز سیدھا تیر رہا
ہے اور اس کا پینڈا گ گہرائی پر ہے۔ ثابت کرو کہ پینڈے کے اوپر پس مرکز کا
ارتفاع ہے

گ ($\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$)

۸ — ایک گروشی مجسم کے کسی قطعہ کو جو قائم تراش سے پیدا ہوتا ہے ماتع میں غرق

کرنے سے اجمال کے مرکز اور پس مرکز کا درمیانی فاصلہ ہمیشہ متقل رہتا ہے۔
خواہ قطعہ کی بلندی کچھ ہی ہو، گردشی مجسم کی شکل دریافت کرو۔

۹۔ پانی پارہ پر ساکن ہے اور ایک مخروط اس قدر وزنی ہے کہ جب تک اس کا راس پارہ کے اندر نہ گھس جائے یہ ساکن نہیں رہ سکتا۔ مخروط کی کثافت معلوم کرو تاکہ توازن قائم ہو سکے۔

۱۰۔ اگر تیرنے والا جسم اسطوانہ ہو جس کا محور انتصابی ہے اور جس کی کثافت اضافی، مانع کی کثافت اضافی کے ساتھ نسبت نہ رکھتی ہے تو ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا اگر قاعدہ کے نصف قطر اور بلندی کی باہمی نسبت ۲:۱ (۱:۲) سے بڑی ہو۔

۱۱۔ مکانی مسائل کا یکساں خول انتصابی محور کے ساتھ تیر رہا ہے اور اس کا تین چوتھائی حصہ پانی نے نیچے غرق رہنا ہے جبکہ اس کو محور کی پیم گہرائی تک ایسے مانع سے بھردیا جائے جس کی کثافت ۵ ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم ہے۔
۱۲۔ گردشی مکانی شکل کے ایک طرف میں پانی ہے اور یہ طرف ایک ثابت کھر درے کرہ پر ساکن ہے اس طور پر کہ اس کا راس کرہ کے بلند ترین نقطہ پر ہے۔ توازن کے قائم ہونے کی شرط معلوم کرو۔

۱۳۔ ایک بے وزن اسطوانی خول میں مانع ہے اور یہ خول دوسرے مانع میں تیر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا سوا سے اس صورت کے جبکہ اندرونی مانع کی کثافت کو بیرونی مانع کی کثافت کے ساتھ جو نسبت ہے وہ ایک سے کم ہو اور اس نسبت ثنائی کے نصف سے بڑی ہو جو اسطوانہ کے نصف قطر کو اندرونی مانع کی گہرائی کے ساتھ ہے۔

۱۴۔ ایک نصف کرہ کی خول کو جس میں مانع ہے ایک ثابت کھر درے کرہ کے راس پر رکھ دیا گیا ہے جس کا قطر خول کے قطر کا دو چندان ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم یا غیر قائم ہوگا بموجب اس کے کہ خول کا وزن مانع کے دو چندان وزن سے بڑا یا چھوٹا ہو۔

۱۵۔ ایک گردشی مجسم اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا راس نیچے کی طرف ہے۔ اس کی شکل معلوم کرو جبکہ پس مرکز کا مقام مانع کی کثافت پر منحصر نہ ہو۔

۱۶۔ ایک مخروطی خول نیچے دار راس کے ساتھ غیر قائم توازن میں تیر رہا ہے۔

توازن قائم بنانے کے لئے اس میں کٹنا پانی ڈال دیا جائے۔

۱۷۔ ایک ٹھوس مخروط مائع میں اس طرح رکھ دیا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور اس کا راس نیچے دار برتن کے قاعدہ پر جس میں مائع ہے ٹکا ہوا ہے۔ اگر مائع کی گہرائی مخروط کے ارتفاع کا نصف ہو اور اس کی کثافت مخروط کی کثافت کا چار گنا ہو تو ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا اگر مخروط کا زاویہ راس ۱۲۰° سے بڑا ہو۔

ٹھوس مخروط کی بجائے اسی ارتفاع کا ایک پتلا مخروطی غول رکھ دیا گیا ہے جس کا زاویہ راس ۹۰° ہے اور جس کے اندر مرکز کے وسطی نقطہ کی ہوا سطح تک مائع ہے اور اس مائع کی کثافت بیرونی مائع کی کثافت کا نصف ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا اگر غول کا وزن اس کے اندرونی مائع کے وزن کے تین چوتھائی سے کم ہو۔

۱۸۔ ایک اسطوانی ظرف میں جس کا وزن نظر انداز کیا جا سکتا ہے پانی ہے۔ اس ظرف کو ایک ثابت گہرور سکھ رہا ہے اس پر رکھ دیا گیا ہے اسطوانہ اس کے قاعدہ کا مرکز کرہ کو مس کرتا ہے۔ معینہ ہو کے اسے قائمیت کی شرط معلوم کرو۔ اگر اس قسم کے بناؤں کے لئے توازن تبدیلی ہو تو ثابت کرو کہ چھوٹے اسطوانہ ہٹا کر اسے قائمیت پر توازن غیر قائم ہوگا۔

۱۹۔ ایک گروہی مجسم کی شکل معلوم کرو جو انتصابی محور کے ساتھ قائم ہو۔ اگر مجسمہ کے زیر ترین نقطہ سے اس مرکز اور اچھال کے مرکروں کے فاصلہ ہلکے درجہ کے مستقل نسبت رہی ہے تو اس کی کثافت پتھر کی ہو۔

۲۰۔ ایک نصف دائری اسطوانہ انتصابی محور کے ساتھ ایک مائع میں جس کی کثافت اس کی کثافت کا دو چوتھائی ہے۔ مگر یہ اسطوانہ اس سطح پر گروہ حرکت کر سکے جو انتصابی مستوی رخ اور سطح کا خطاط قطع ہے تو قائمیت کی شرط معلوم کرو۔

۲۱۔ ایک قائم مستدیر مخروط افقی محور کے ساتھ ایک مائع میں جس کی کثافت اس کی کثافت کا دو چوتھائی ہے۔ اس کے راس کو مائع کی سطح میں ایک ثابت نقطہ کے ساتھ ڈال کر دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ قائمیت کے لئے زاویہ راس ۱۲۰° سے کم ہونا چاہیے۔

۲۲۔ ایک اسطوانی ظرف اپنے مرکز ثقل میں سے گزرنے والے ایک افقی محور کے گرد حرکت کر سکتا ہے، اور اس کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہو۔ اگر اس میں پانی ڈال دیا جائے تو ثابت کرو کہ ابتدا میں توازن غیر قائم ہوگا۔ ایسی شرط معلوم کرو کہ کافی پانی ڈالنے سے توازن قائم بنانا ممکن ہو۔

۲۳۔ دئے ہوئے وزن کا ایک مخروطی ظرف اپنے افقی قاعدہ کے ایک قطر کے گرد حرکت کر سکتا ہے، اس کو ایک وزن دار سیال سے جزو بھر دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن ہمیشہ قائم ہوگا اگر مخروط کا نصف زاویہ $\alpha > 30^\circ$ لیکن اگر زاویہ اس سے بڑا ہو تو معلوم کرو کہ توازن کب قائم ہوگا اور کب غیر قائم۔

۲۴۔ پانی ایک ظرف میں ہے جس کا قاعہ۔ یہ افقی ہے۔ اس میں ایک مکانی نما ہے جس کا راس ظرف کے قاعہ پر لگا ہوا ہے۔ مکانی نما کو سیال اور قاعہ جزو بھر دیا گیا ہے۔ مکانی نما کی کثافت نوعی پانی کی کثافت کا $\frac{1}{2}$ ہے اور اس کے محور کے طول کو وتر خاص کے ساتھ نسبت $4:3$ ہے۔ سیال کی کم سے کم گہرائی معلوم کرو جس کے لئے توازن قائم ہوگا۔

۲۵۔ ایک مکانی نما پال جس کا وزن W ہے، ایک افقی میز پر رکھا ہے اس کے اندر پانی کی کچھ مقدار ہے جس کا وزن N ہے۔ اگر میال اور اس کے اندر کے پانی کے مرکز ثقل کا ارتعاع F ہو تو توازن قائم ہوگا بشرطیکہ مکانی نما کا وتر خاص

$$2 < (N + 1) F$$

۲۶۔ ایک گولہ جسم انتصابی محور کے ساتھ تیر رہا ہے۔ اس کے محور کے ایک ثابت نقطہ پر اوزان رکھنے سے اس کو مختلف گہرائیوں تک ڈوبا گیا ہے۔ مجسم کی شکل معلوم کرو کہ توازن ہمیشہ تعدیلی رہے۔

۲۷۔ ایک ٹھوس مخروط جس کا محور انتصابی اور اس نیچے وارے ایک محور کے گرد جو اس کے ٹکونی خط پر منطبق ہوتا ہے حرکت کر سکتا ہے۔ کس گہرائی تک اس نظام کو پانی میں غرق کیا جائے کہ مخروط کا توازن قائم ہو۔

۲۸۔ کاک۔ ایک ٹھوس جسم ایسی سطح سے محدود ہے جس کی ٹکونین ناقص

کے ایک راج کو محور اعظم کے گرد گھما نے سے ہوتی ہے۔ یہ جسم پادہ میں مار کر تھک غرق ہے۔ اگر صغیر زاوی ایشاؤں کے لئے توازن تعدیلی ہو تو ثابت کر دو کہ

$$2z^2 + 4mz^2 + m^2z^2 - z^2 - 2 = 0 \quad (z = \text{جھجھ کا مرکز})$$

۲۹۔۔ ایک ٹھوس مخروط جس کا زاویہ راس ۲۰° سے کم ہے ایک چکنے سیدھے مار کے گرد جو اس کے مرکز ثقل میں سے گزرتا ہے اور اس کے محور پر عمود ہے حرکت کر سکتا ہے۔ اگر مار کو مانع کی سطح میں رکھا جائے تو ثابت کر دو کہ مخروط قائم توازن کے محل میں ہو گا۔ جبکہ اس کا محور افقی کے ساتھ زاویہ جب ۳۰° جب ۴۰° کا میلان رکھتا ہو۔

۳۰۔۔ ثابت کر دو کہ تیرنے والے حصہ کو اس کے مرکز ثقل کے گرد چھوٹے زاویہ ط میں سے گھمانے میں یہ کام کرنا پڑتا ہے۔

$$1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta = 0 \quad (\theta = \text{زاویہ})$$

جہاں جسم اور مٹا کے ہوئے مانع کے مرکز ثقل کا درمیانی فاصلہ ط ہے اور جسم کے مرکز ثقل اور تیرنے والے حصے کے رقبہ کے مرکز ثقل کے درمیان افقی فاصلہ ۲ ہے۔

۳۱۔۔ ایک مکانی نابیلہ جس کا نصف راس ۳۰° ہے اور جس کی کثیت کا مرکز راس سے ۲ فاصلہ پر ہے دو حالتوں میں تیر رہا ہے۔ بن کی کٹناختیں نہ اور ت ہیں اور ۱۰° فٹ تیر کر دو کہ جسم کو ایک افقی محور کے گرد چھوٹے زاویہ ط میں گھما کر اس میں سے کام کرنا پڑتا ہے وہ ہے۔

$$\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \cos^2 \theta = 1 \quad (\theta = \text{زاویہ})$$

جہاں ۱۰° فٹ محور کے وہ طول ہیں جو سیالوں میں غرق ہیں۔

۳۲۔۔ ایک متناہم ارادیہ متناہم اساتیرہ مثلث سیال میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا راس ۱۰° کی طرف سے قاعدہ افقی ہے اور اس کے رقبہ کا ۱/۲ حصہ

سیال کے نیچے غرق ہے پس اس کا مرکز نقل پس مرکز پر منطبق ہوتا ہے۔ دریافت کرو کہ توازن حقیقت میں قائم ہے یا غیر قائم۔

۳۳ — گردشی مکانی نما کی شکل کا ایک مجسم انتصابی محور کے ساتھ تیر رہا ہے۔ اگر جمود کا مرکز پس مرکز پر منطبق ہو تو ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا۔

۳۴ — لا اسکے متوازی ایک مستوی سے سطح ج با = ی (۱ - لا) کو قطع کرنے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے وہ اپنے سے ن گنتی کثافت والے سیال میں تیر رہا ہے۔

اگر کسی انتصابی مستوی میں صغیر زاوی ہٹاؤ کے لئے توازن تعدیلی ہو تو ثبات کرو کہ

$$ن = ۱ + \frac{۵}{۸} - \frac{۱}{۲} ج$$

۳۵ — ایک متساوی الساقین مثلثی پترا اب ج ایک مانع میں جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا قاعدہ اب افقی ہے اور مانع کی سطح کے اوپر واقع ہے۔ اگر مانع کی سطح کے نیچے ج کی گہرائی گ ہو تو ج کے اوپر پس مرکز کی بلندی ہے

$$\frac{۱}{۲} گ - \frac{۱}{۲} ق$$

۳۶ — ایک ناقصی پترا ایک مانع میں نصف غرق شدہ تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کا عرضی محور (۱۲) انتصابی ہے۔ مانع کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کا مربع۔ ثابت کرو کہ پس مرکز کی گہرائی ۳۲ و ۱۵/۱۱ ہے۔ جہاں ز، خردج المرکز ہے۔

۳۷ — نصف قطر کا قائم مستدیر اسطوانہ ایک مانع میں اس طرح ساکن ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور اس کا طول ج مانع میں غرق ہے اگر ی گہرائی پر کثافت ذ (ی) ہو تو ثابت کرو کہ مرکز اجد کی گہرائی ہے

کری فہ (ی) فری - $\frac{1}{p}$ فہ (ج)

کری فہ (ی) فری

۳۸ — ایک گردش مکافی نما ایک مانع میں جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی اور اس نیچے وار ہے - ثابت کرو کہ توازن قائم یا غیر قائم ہوگا - جو جب اس کے کہ $\frac{1}{p}$ ج $\frac{1}{p}$ (م + ۱) سے چھوٹا ہو یا بڑا جہاں محور کا طول ج $\frac{1}{p}$ اس کا طول غرق شدہ ۱، اور تکوینی مکانی کا وتر خاص م ہے -

۳۹ — ایک چپٹا کرہ نما (Oblate Spheroid) ایک مانع میں جسکی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کا مربع نصف غرق شدہ تیر رہا ہے اور اس کا محور انتصابی ہے - ثابت کرو کہ مانع کی سطح کے اوپر مرکز ما بعد کا ارتقاع ہے

$$\frac{h}{b} - \frac{1}{p}$$

۴۰ — ایک ٹھوس گردش مکافی نما اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی اس نیچے وار اور اس کے مانع کی سطح میں ہے مانع کی کثافت ی گہرائی پر $(1 + y)$ ہے جہاں تکوینی مکانی کا وتر خاص $\frac{1}{p}$ ہے - ثابت کرو کہ اس سے بس مرکز کا فاصلہ $\frac{1}{p}$ ہے -

۴۱ — ایک مخروط نیچے وار اس کے ساتھ مانع میں تیر رہا ہے جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کا مربع - اگر مخروط کی کثافت مانع کی اس کثافت کے مساوی ہو جو مخروط کے ارتقاع کے $\frac{1}{p}$ گہرائی پر ہے تو مخروط کا لادیہ اس جبکہ توازن تقدیلی ہو مساوات

$$\frac{1}{p} = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{5} \right)$$

سے حاصل ہوگا۔

۴۴۔ ف ارتفاع اور ۴ د وتر خاص کا ایک ٹھوس مکانی مناسباتی محل میں ایک مانع کے اندر اس طرح متوازن ہے کہ اس کا راس نیچے وار ہو اور یہ اپنے راس کے گرد جو مانع کی سطح کے نیچے کج گہرائی پر ثابت کر دیا گیا ہے حرکت کر سکتا ہے۔ مانع کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی۔ ثابت کر دو کہ توازن قائم ہوگا اگر مکانی مناسباتی کو اس کے راس پر کے مانع کی کثافت کے ساتھ جو نسبت ہے وہ $\frac{ج^۳ + ۴ + ۱ ج^۲}{۳ ف}$ سے کم ہو۔

۴۴۔ نصف زاویہ راس کا ایک قائم مستدیر ٹھوس مخروط کٹا غرق شدہ ایک مانع میں جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی اس طرح تیرا ہے کہ اس کا راس اوپر وار اور محور انتصابی ہے۔ اگر مخروط کا ارتفاع ف اور مانع کی سطح کے نیچے اس کے راس کی گہرائی ب ہو تو ثابت کر دو کہ راس سے پس مرکز کا فاصلہ $\frac{۳ ف \times ۵ ب + ۴ ف - ف س^۲}{۴ ب + ۳ ف}$ ہے۔

۴۴۔ ڈھلے ہوئے لوہے کی نیچیاں موٹی چادر کا ایک اسطوانی میا جس کا نصف قطر ف اور وزن و پونڈ ہے پانی میں سیدھا تیرا ہے۔ ثابت کر دو کہ اس کا مرکز ثقل نچلے رخ کے اوپر

$$\frac{۲۱ ۴۹}{۹} + \frac{۹}{۲۱ ۳۹۳}$$

سے بلند تر نہیں ہو سکتا۔

نیز ثابت کر دو کہ اس کا وزن خواہ کچھ ہی ہو اس کا پس مرکز نچلے رخ کے اوپر۔ د ۱ ف سے زیادہ بلند رہتا ہے۔

۴۵۔ ایک اسطوانی پیالہ یکساں پتلی ڈھلی ہوئی دھات کی چادر سے بنایا گیا ہے۔ پیالہ کی تراش دائری ہے اور اس کا قاعدہ چپٹا اور منہ کھلا ہوا ہے۔ اس کا طول قاعدہ کے نصف قطر کا $\frac{۱}{۲}$ گنا ہے اور پیالہ میں جتنا پانی سما سکتا ہے اس کا وزن

و ہے۔ ثابت کر دو کہ پیالہ انتصابی کونوں کے ساتھ قائم توازن میں پانی کے اندر نہیں تیر سکتا اگر اس کا وزن (۲۰۰) اور (۸۷۱) کے درمیان واقع ہو۔
 اگر پیالہ کا وزن $\frac{1}{2}$ و ہو تو اس میں پانی ڈال کر اس کے توازن کو قائم بنا سکتے ہیں تاکہ انتصابی کونوں کے ساتھ یہ تیرے بشرطیکہ پیالہ میں جو پانی ڈالا جائے اس کا وزن $\frac{1}{2}$ و اور $\frac{1}{2}$ کے درمیان ہو۔
 ۴۴ — ایک آغختی جس کی کثافت $\frac{1}{2}$ ہے قطع سکائی کی شکل کی ہے۔ اس کا وتر خاص $\frac{1}{2}$ و ہے اور یہ اس سے $\frac{1}{2}$ فاصلہ رکھتے دوہرے میں سے محدود ہے۔ یہ تختی ایک مانع میں جلی کثافت $\frac{1}{2}$ ہے اس طرح تیر رہی ہے کہ اسکی ستویں سطح انتصابی ہے۔ اگر

$$۳ \text{ ف (۱۔ کہ) } < ۱۰ \text{ و}$$

$$\text{اور } ۴ \text{ ف (۱۔ کہ) } + ۱۰ \text{ و } < \{۲ \text{ ف (۱۔ کہ) } + ۱۰\}$$

تو ثابت کر دو کہ قائم توازن کے دو محل ہیں جن میں محور انتصابی خط کے ساتھ زاویہ

$$\cos^{-1} \left(\frac{۳}{۱۰} \right) \text{ (۱۔ کہ) } - ۲ \text{ ف}$$

بناتا ہے۔ یہاں کہ $\frac{۳}{۱۰}$ = ث

۴۵ — ایک جسم دو انعامات میں جن کی کثافتیں $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ + ث ہیں آزادانہ تیر رہا ہے۔ آزاد سطح اور سطح سے جسم کی جو ذیلیں حاصل ہوتی ہیں ان کے رقبے $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ + ث ہیں اور ان کے مراکز ثقل ج اور ج + ث ہیں۔ خفیف ہٹاؤ کے لئے ثابت کر دو کہ ہٹاؤ ہونے سے سیال کی کمیت وہی رہے گی اگر گردش کا

محور اس انتصابی ستویں میں واقع ہو جو ج + ث کو نسبت $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}$ میں یا

ث : $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)$: $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)$ میں تقسیم کرتا ہے بموجب اس کے کہ انعامات

غیر محدود ہیں یا ایک ایسے ظرف میں ہیں جس کو مستویوں $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ سے تراشنے سے تراشوں کے رقبے $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ ہیں۔

۴۸۔ ایک دوسرا دکانی جہاز دوسری اور متشابه جہازوں کو ایک دوسرے کے ساتھ طویل کر بایا گیا ہے، ہر ایک میں ایک ہی طرح کا ہم وزن بوجھ لاد گیا ہے۔ اگر علیحدہ جہازوں کی صورت میں پہلو پر لڑ گئے کے لئے مرکوز انقل کے ادیر پس مرکز کا ارتفاع دہو تو ثابت کرو کہ دوسرے جہاز کی صورت میں یہ ارتفاع

د + $\frac{b^2}{c}$ ہو گا جہاں تیراؤ کے مستوی کا رقبہ (کسی ایک کا حجم غرق شدہ ح اور وسطی مستویوں کا درمیانی فاصلہ ۲ ب ہے۔

(۱۰۶) ۴۹۔ ایک منشوری جسم کے رخ یا پہلو خط آب کے نزدیک انتصابی ہیں اس کو اس طرح لاد گیا ہے کہ اس کا مرکز انقل اس کے پس مرکز پر منطبق ہوتا ہے جب کہ اس کو اس کے کناروں کے متوازی محور کے گرد گھما کر اس میں ہٹاؤ پیدا کیا جائے ثابت کرو کہ توازن قائم ہے۔

۵۰۔ ایک مخروط ناقص جس کا نصف زیادہ باس ہے ایک مانع میں جبکی کثافت اس کی کثافت کا دو چند ہے تیرا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ اس طرح تیر سکتا ہے کہ اس کا محور انتصابی سمت سے مائل ہو اور بڑے قطر والا سر سیال کے باہر ہو بشرطیکہ

$$\text{جمہ} < (س + ر) \frac{h}{e} / \frac{1}{4} (س + ر) \frac{1}{7}$$

جہاں رنوں کے نصف قطر س اور ر ہیں۔

۵۱۔ پتلے مخروطی خول کا ایک بند مقطوعہ جس کا وزن نظر انداز کیا جاسکتا ہے متجانس سیال میں تیر رہا ہے اور اس کے اندر زیادہ وزنی دوسرا متجانس سیال ہے۔ ثابت کرو کہ خواہ کونسا ہی رخ غرق کیا جائے قائمیت کی شرط جبکہ محور انتصابی ہو یہ ہے

$$\frac{r^2 (r^2 + r^2 + r^2)}{r^2 (r^2 + r^2) - (r^2 + r^2)} > \frac{r^2}{r^2}$$

جہاں محور کا غرق شدہ طول ف اور کون کا غرق شدہ حصہ ل ہے۔ مقطوعہ کے غرق شدہ برج کا نصف قطر ہے۔ اور اندرونی و بیرونی دائروں کے خطوط آب کے نصف قطر اور ہم ہیں۔

۵۲۔ ایک ٹھوس مکعب مانع میں انتصابی محور کے ساتھ تیر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ تمام راہوں کی ہٹاؤں کے لئے توازن قائم باغیر قائم ہوگا۔ بوجب اس کے کہ نیز اؤ کے مستوی سے مکعب کی تراش مسدس یا مثلث ہو۔

۵۳۔ ایک ناقص نما ایک مانع میں جس کی کثافت نوعی اس کی کثافت نوعی کا دو چند ہے تیر رہا ہے۔ ایک چھوٹا حفت انتصابی مسوی میں ناقص نما پر عمل کرتا ہے اور اس کے حفت دور بر ہٹائے ہوئے محل میں رکھنا ہے۔ ثابت کرو کہ حفت کے مسدس اور سیال کی سطح کا سطح طالع اور وہ محور جس کے گزرا ناقص نما گھومتا ہے باہم منبوج ہونگے بلحاظ اس ماسلی مخروطی سے جو نیز اؤ کے مسوی میں ہے۔

۵۴۔ اگر ایک تیرے والے ہمہ کا محل عمر قائم ہو تو جو حکم مرکز قفل دونوں پس مرکزوں کے اور واقع ہوگا ثابت کرو کہ جسم میں سطح آب کے مستوی میں ایک خط ثابت کرنے سے اس کے گزراؤرش کے لئے قائم محل حاصل ہو سکتا ہے بشرطیکہ یہ خط ایک خاص مانع کے باہر واقع ہو۔

۵۵۔ ایک ٹھوس متعاش مخروط قائم توازن کی حالت میں ایک سیال میں نہر رہا ہے۔ اس نہر پر کہ اس کا محور انتصابی ہے اور قاعدہ سیال سے باہر ہے۔ سیال کی صافیت ایسے باقی ہے جیسے گہرائی کی ن ویں وت۔ ثابت کرو کہ مخروط کا نصف راہیہ راس

$$\text{جہاں} \frac{2}{\text{ماس} + \text{ن}} = \frac{\text{ن}}{\text{ف}}$$

سے تراہونا چاہیے۔ جہاں مخروط کا ارتفاع ف اور محور کا غرق شدہ طول ل ہے۔ ۵۶۔ ایک وزن دار متعاش مکعب ایک سیال میں یورپی طرح غرق گردیا گیا ہے۔ سیال کی کثافت = گہرائی کے مکعب کا مرکز مکعب کے رورخ افقی ہیں۔

ثابت کرو کہیں مرکزی ارتفاع $\frac{۱۲}{۱۰}$ مہ $\frac{۱۲}{۱۰}$ ہے جہاں مکعب کی کمیت ک اور اس کے ایک کنارے کا طول ۱ ہے۔

۵۷ — قائم مستدیر مخروط کی شکل کا ایک پتلا ظرف جس کا وزن نظر انداز کیا جاسکتا ہے انتصابی محور کے ساتھ ایک مانع میں تیر رہا ہے۔ مانع کی کثافت مہ \times (۱ + ی) ہے جہاں مانع کی سطح کے نیچے گہرائی ی ہے اور محور کا غرق شدہ طول ف ہے اگر مخروط کے اندر مہ (۱ + $\frac{۳}{۴}$) کثافت کا مانع ہو تو ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا بشرطیکہ

$$\frac{۳}{۵} \left(\frac{۱۲}{۱۰} \right)^2 < \frac{۳}{۵} \frac{۱۲ + ف}{۱۵ + ف}$$

۵۸ — ایک تنحاس وزن دار مکانی شکل کے اسطوانے کا ایک طویل حصہ مکونوں کے علی القوانم دو مستویوں سے اور ایسے ایک مستوی سے محدود ہے جو مکونوں کے محور پر عمود وار ہے۔ یہ اسطوانہ اس طرح ساکن ہے کہ اس کا محوری مستوی انتصابی ہے اور زیر ترین مکون ایک ظرف کے افقی کمر درے پیدے کو مس کرتا ہے اس ظرف میں مانع ڈال دیا گیا ہے جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کی کن دیں قوت۔ مانع کی گہرائی گ ہے، جسم کا ارتفاع ف (کے گ) اور مکونین مکانی کا در خاص ۴ ہے۔ یہ فرض کر کے کہ تیراؤ کی حالت پیدا نہیں ہوتی ثابت کرو کہ ثابتیت کے لئے جسم کی کثافت کو مانع کے زیر ترین طبقہ کی کثافت کے ساتھ جو نسبت ہے وہ

$$\frac{۳}{۸} \frac{جا (۱ + ن)}{(۲ + ن)} \cdot \frac{۳}{۴} \left(\frac{گ}{ف} \right)^2 < \frac{۳}{۱۰ - ف}$$

سے کم ہونی چاہیے جبکہ

$$۵گ < (۵ + ن) (۱۰ - ف) [جا (۱ + ن)]^2 = ۲(ن + ۱)$$

جا کا افعال ہے

۵۹۔ ایک یخیاں ٹھوس قاعہ مستدبر مخروط کی کثافت نہ اور زاویہ راس
۲ ص ہے یہ مخروط ایک سیال میں تیرا ہے اس طور پر کہ اس کا راس نیچے کی طرف
اور اس کا قاعدہ سطح کے اوپر ہے۔ سیال کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی
کی نوبت اور مخروط کے ارتفاع کے مساوی گہرائی پر اس کی کثافت
نہایت ہے۔ ثابت کرو کہ انتصابی نخل میں توازن قائم ہوگا بشرطیکہ

$$(1+n)(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n}) < (1+\frac{1}{n})^3 \text{ جم } 6+5$$

نیز یہ کہ مخروط اس صورت میں ہی متوازن ہوگا جبکہ انتصابی کے ساتھ اس کے
محور کا میلان طہ مسادات

$$(1+n)(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})$$

$$= (1+\frac{1}{n})^3 \text{ جم } 3+2 \text{ طہ } 3+2 \text{ (جم طہ - جب اء) } 3+2$$

سے حاصل ہو۔

۶۰۔ ایک کعب جس کا کنارہ ۱ ہے پانی میں اس طرح تیرا ہے کہ اس کے
دو رخ افقی ہیں اور انتصابی کناروں کا طول لی پانی میں غرق ہے۔ اگر کعب کو
ایک افقی کنارے کے متوازی محور کے گرد ایک محدود زاویہ ط میں گھمایا جائے
اس طور پر کہ ہٹائے ہوئے پانی کا حجم غیر متغیر ہے اور اوپر کے رخ کا کوئی حصہ
غرق نہ ہونے پائے تو ثابت کرو کہ کام جو کرنا پڑتا ہے وہ ہے

$$[\frac{1}{2} \text{ طہ }] \text{ جب طہ مس طہ - (1-1) (جب } \frac{1}{2} \text{ طہ)}$$

جہاں کعب کا وزن و ہے۔ (دیکھو صفحہ ۱۰۵)

۶۱۔ ایک جہاز کے پینے میں پانی ہے اور جہاز سمندر میں تیرا ہے۔
ایک ٹھوس جسم کو رین برکی ایک مشین کے ذریعہ تھام کر جہاز کے پینے میں لٹکایا
گیا ہے اس طور پر کہ جسم پانی میں جزو غرق رہتا ہے اور پانی کا وزن و ہٹاتا
ہے۔ اس کو بھرا اور محور ا غرق کیا گیا ہے تاکہ اس کا صغیر طول ص لا اور

مشتاقل محل پہلو کے بل لڑکنے کے لئے قائم توازن کے محل ہو گئے اور
مشتاقل محل غیر قائم ہو گا۔

۶۵۔۔۔ مرجع تراش کا ایک کندہ پانی میں تیر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ غیر مشتاقل
محل میں تیر سکیگا اگر اس کی کثافت ۲۱۲ د اور ۲۸۱ د یا ۴۱۹ د اور ۴۸۸ د
کے درمیان واقع ہو۔ اور یہ کہ ان حدود کی درمیانی کثافتوں کے لئے اب تک
کنارہ سب سے اوپر اور ان حدود کے باہر کثافتوں کے لئے ایک رخ سب سے
اوپر ہو گا۔

۶۶۔۔۔ ایک متجانس جسم قائم توازن کی حالت میں آزادانہ تیر رہا ہے۔ اگر جسم کو
الٹا کر اوپر کا رخ پیچے کر دیا جائے اور وہ مناسب کثافت کے مائع میں اسی
پہلے تیراؤ کے مستوی پر تیرے تو ثابت کرو کہ توازن قائم ہو گا۔

۶۷۔۔۔ پس مرکزی ارتفاع میں موثر صاف کا اندازہ لگاؤ جبکہ جہاز کو ایک تیز
گھومنے والے آرٹیفیٹ کے ذریعہ قائم کیا جائے۔

۶۸۔۔۔ ایک دیوار پہلو جہاز جس کی کوئی تراش ۲ عرض کا مستطیل ہے
سیدھے محل میں تیر رہا ہے اور لاگہرائی تک غرق ہے جہاز کا مرکز ثقل پسندے
کے اوپر ۱/۲ تک ارتفاع پر ہے۔ جہاز کو زاویہ ط میں ایک جانب بھرا دیا گیا ہے اور
ایک جفت کے ذریعہ جس کا معیار ل ہے اسے توازن میں رکھا گیا ہے ثابت
کرو کہ

$$ل = \text{وجہ ط} \left\{ \frac{1}{11} - \frac{1}{2} (3 \text{ قط} ط + 1) - \frac{1}{4} (\text{گ} - \text{لا}) \right\}$$

جہاں جہاز کا وزن د ہے۔

۶۹۔۔۔ ایک یکساں ٹھوس جسم مکافی نما $\frac{2}{11} + \frac{2}{11} = \frac{4}{11}$ کے ایک

حصہ کی شکل کا ہے جو مستوی ی = ل سے تراشنے سے پیدا ہوا ہے۔ یہ جسم
نیچے وار اس کے ساتھ مائع میں آزادانہ تیر رہا ہے۔ اس کے مستوی قاعدہ کے
نقطہ (ضما، عا) پر ایک چھوٹا وزن رکھ دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ مستوی قاعدہ میں کے

وہ نقطے جو انتصابی ہٹاؤ سے غیر متاثر رہتے ہیں ایک ایسے خط پر واقع ہوتے ہیں جس کی مساوات ہے

$$\frac{\text{ضالہ}}{\text{والہ} - (1 - \frac{1}{3})} + \frac{\text{عاما}}{\text{ب} - (1 - \frac{1}{3})} = 0$$

جہاں محسوس کی کثافت کو مانع کی کثافت کے ساتھ نسبت $\frac{1}{3}$ ہے۔



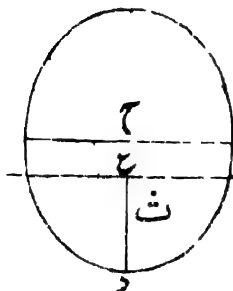
باب ششم

تیرنے والے اجسام کے اہترازات

۱۰۹۔ اگر ایک وزن دار جسم دائرے میں قائم توازن کے محل میں تیر رہا ہو، اس سے اس محل سے ذرا ہٹا دیا جائے تو وہ چھوٹے انتصابی اور زاویائی اہترازات کریگا۔ ظاہر ہے کہ ایسے اہترازات کا سوال ایک ماحر کی سوال سے اوریہ کہ اگر ہم مانع کی حرکت کو نظر انداز کر دیں تو جسم کے اہترازات کے اودار کے لئے جو نتائج حاصل ہونے دو حقیقی درون کے اودائی بدو ہونگے۔ اس کتاب کی بہت کاجہانک آعلق ہے ہم ہمہ یہ نفس کر سکتے ہیں کہ مانع نہ جمہ و نظ انداز دیا گئے ہئے۔ علاوہ بریں ہم صحت ایسے ساہو سورت پر غور کریں گے۔ ہم فرض کریں گے کہ جسم اپنے مرکز میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی کے نیچے سے متماثل ہے اور یہ کہ ابتدائی ہٹاؤ اس مستوی کے متوازی ہے۔

ظاہر ہے کہ جسم کے تمام سطحوں کی بعد کی حرکتیں اس مستوی کے متوازی ہونگی اور اگر توازن قائم ہو تو حرکت چھوٹے انتصابی اور زاویائی اہترازات پر مشتمل ہوگی

اول فرض کرو کہ شاہ اور ہ میں سے گزرنے والا خط (ج ح د) تیرا کے مستوی کے مرکز ہنہ سی میں سے گزرتا ہے۔ جب یہ سورت ہو تو انتصابی اور زاویائی ہٹاؤں پر ایک دوسرے سے علحدہ غور کیا جاسکتا ہے۔



ایک چھوٹے انتصابی ہٹاؤ پر غور کرو۔ جسم کے چھوٹے حصہ ح ع کو جسے سیال کے باہر اٹھایا گیا ہے ایک پتلا اسطوانہ خیال کیا جاسکتا ہے۔
فرض کرو کہ ح ع = ی تو ح ث = ج ث۔ ی اور جسم پر نیچے وار
قوت = جسم کا وزن۔ ہٹاے ہوئے سیال کا وزن
= ج ث ل = ی

جہاں یہ ا دو کے مستوی کا رقبہ ل ہے۔

(۱۱۰)

$$\therefore \text{ک فر ح ث} = \frac{\text{ج ث ل ی}}{\text{فر ت}}$$

جہاں جسم کی کیت ک ہے۔

لیکن ک ج = ہٹائے ہوئے سیال کا وزن
= ج ث ح = جسم کے حصہ ج د کا حجم ح ہے۔

اس لئے مساوات

$$\frac{\text{فر ت ی}}{\text{فر ت}} + \frac{\text{ج ل ی}}{\text{ح}} =$$

سے حرکت کا تعین ہوتا ہے۔

اس لئے پورے ہتھراز کا و ت ہوگا

$$\sqrt{\frac{\text{ج ل ی}}{\text{ح}}}$$

۱۰۔ اب ج کے گرد ایک چھوٹا زادی ہٹاؤ (ع) فرض کرو، تب ث بقدر اس ماصلہ کے اوپر اٹھیکگا جو ع پر منحصر ہوگا اور اس لئے نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ بقابلہ ان مقداروں کے جو ع پر منحصر ہوتی ہیں اور پھر اگر جسم کو ساکن فرض کر کے اس کو اپنی حالت پر چھوڑ دیا جائے تو وہ (اس فرض کی بناء پر کہ توازن قائم ہے) ث میں سے گزرنے والے افقی محور کے گرد ہتھراز کرے گا۔

اگر ابتدائی ہٹاؤ ث کے گرد لیا جائے تو بھی دراصل وہی بات پیدا ہوگی

کیونکہ ایسی صورت میں ج انتی سمت میں قابل قدر فاصلہ طے کر گیا (یعنی صرف پہلے رتبہ کی صفو مقداروں کا لحاظ کرنے ہوئے) اور ہٹائے ہوئے سال کی مقدار اوپر کی طرح غیر متغیر رہیگی۔

اگر پس مرکز ہونوں کے گروسیالی دباؤ کا معیار

$$= ح ت ح \times ح د ش جب ط$$

اور ط کو کٹانے کی طاف اٹل ہوتا ہے یہاں ط وہ زاویہ ہے جو ش و احتسابی کے ساتھ آن ب پر ماتا ہے۔

$$\text{لیکن } ح د = \frac{س ا ا}{ح} - د، \text{ اگر } ح ت = د$$

اب چونکہ ش میں سے گزرنے والا انقی محور صدر می محور ہے اس لئے

$$ک س ا = \frac{ف ا ط}{د ت ا} = - ج ت (س ا ا - ح ط)$$

یہاں ط کی اعلیٰ نوٹس لطر امدار کردی گئی ہیں اور ش میں سے گزرنے والے انتی محور کے گرجسم کے جود کا معیار ک س ا ہے۔ یعنی

$$س ا - د ت ا = ج (س ا ا - ح ط) =$$

(۱۱) یہ مساوات چھوٹے اہترارات کو تعمیر کرتی ہے جبکہ س ا < ح یعنی جبکہ ح د کے اوپر واقع ہو اور اہترارات وقت

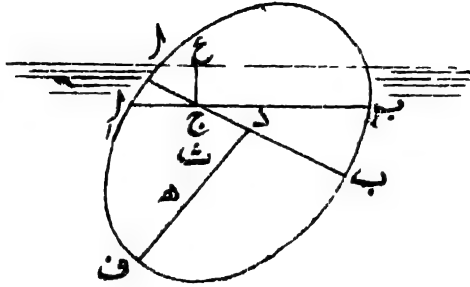
$$س ا - د ت ا = \frac{ح}{ج (س ا ا - ح ط)} \text{ میں واقع ہونے میں۔}$$

اگر ت ا د کے نیچے واقع ہو تو ر کی علامت بدل دی جائیگی۔

یہ معلوم رہے کہ قائمیت کے پرکھنے کی بنا پر اس منجہ سے اخذ ہو سکتی ہے جو ابھی حاصل کیا گیا اہتراز کے لئے س ا - ح کا ایک مثبت مقدار ہونا ضروری ہے

۱۰۸۔۔۔ نائینا اگر ح اور ش کو ملانے والا خط قطع ج میں سے نہ گزرے تو

دونوں حرکتیں ایک دوسرے سے غیر متعلق نہیں ہونگی اور وہ قانونِ جہانِ حرکتوں کی تعین کرتا ہے طریقہ ذیل سے معلوم ہو سکتا ہے۔



فرض کرو کہ جسم کو تشاکل کے انتصابی مستوی میں خفیف طور پر ہٹا کر چھوڑ دیا گیا ہے اور خط $ه$ $د$ $ب$ آن ت پر انتصابی کے ساتھ زاویہ $ط$ بناتا ہے اور $ی =$ سطح کے نیچے $ج$ کی گہرائی $ج$ $ع$ ،
وضع کردہ $ه$ $د$ $ا$ تیراؤ کے مستوی کو نقطہ $د$ پر قطع کرتا ہے اور

$$ه$$
 $د$ $ا$ $ج$ $د$ $ب$ ، $د$ $ت$ $=$ $د$

اور دیگر نمونہ لاشہ کی طرف -

$$تب$$
 $د$ کی گہرائی $=$ $ی$ $+ ب$ $جب$ $ط$ $+ د$ $بم$ $ط$

زیر بحث رشتہ تک -

$$=$$
 $ی$ $+ ب$ $ط$ $+ د$

ہٹائے ہوئے سیال کا وزن

$$ا$$
 $ف$ $ب$ $+ ج$ $ع$ $ج$ $یا$ $ا$ $ف$ $ب$ $+ ج$ $ع$ $ج$

کے مساوی حجم کے سیال کا وزن ہوگا -

$$=$$
 $وزن$ $= ج$ $د$ $ح$ $+ ج$ $د$ $ا$ $ی$

اور ایک $\frac{\text{فرق}}{\text{فرق}}$ (ی + د + ب ط) - ج - (ج ث ح + ج ث ای)

= ج ث ای

(۱) $\frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = \frac{\text{ب}}{\text{فرق}} - \frac{\text{ح}}{\text{ح}}$

(۱۱۳) مثلاً اگر سب سے بڑے واسطے انھنی محور کے گرد (حصہ ری محور ہے اور ہٹاؤ کے ساتھ) (ب) آزاد فی حرکت کو پیش قدمی رکھ کر دوسری مساوات حاصل ہوگی۔
نہتہ ۱۔ اگر سیالی دماؤ سے مویار کو درجہوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔
۲۔ ایک تو حصہ ۱۔ ابالی وجہ سے ہے اور دوسرا ہٹاؤ ہوئے سیالی کے حصہ ۲۔ ج کی ہے۔

سیالی دماؤ کا ثقل الذکر حصہ = ج ث ح جو جس مرکز میں سے
اور دوسرا حصہ ۲۔ ہے اور موخر الذکر حصہ = ج ث ای جو تیزاد کے مستوی کے
مركز ہندسی ج میں سے عمود رہتا ہے۔

ط کہ حصہ ۱۔ سے کو مویار، ریکھنے والی سمت میں معیار

= ج ث ح - ج ث ای (ب ج ط - د ج ط)

= ج ث ای (ا ح ط - ج ث ای (ب - د ط)

= ج ث ای (ا ح ط - ج ث ای (ب ی

جہاں ی اور ط کے حامل تذب کو نظر انداز کر دیا گیا ہے

نیک سر ا $\frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = \text{ج ث ای} - \text{ج ث ای} (ا ح ط + ج ث ای ب ی$

(۲) $\frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = \text{ج ث ای} - \text{ج ث ای} (ا ح ط + ج ث ای ب ی$

(۱) اور (۲) مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$\frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} + \frac{\text{ج ل}}{\text{ح}} (ا + \frac{\text{ب}}{\text{س}}) - \frac{\text{ج ب}}{\text{س}} (ا - \frac{\text{ل}}{\text{ح}}) - ط =$

$$\frac{\text{فرق ۲}}{\text{ح ۲}} - \frac{\text{ج ۱ ب}}{\text{ح ۲}} + \frac{\text{ج ۲}}{\text{ح ۲}} \left(1 - \frac{\text{ح ۱}}{\text{ح}} \right) = 0$$

جن کو لکھا جاسکتا ہے

$$(۳) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{فرق ۲}}{\text{ح ۲}} + \text{ری} - \text{ب ن ط} = 0 \\ \frac{\text{فرق ۲}}{\text{ح ۲}} - \frac{\text{ع ی}}{\text{ب}} + \text{ن ط} = 0 \end{array} \right.$$

ان مساواتوں کو مکمل کرنے کے لئے دوسری مساوات کو لہ سے ضرب دیکر پہلی مساوات میں جمع کرو اور فرض کر دو

$$(۴) \quad \frac{\text{ل ن} - \text{ب ن}}{\text{ر ب} - \text{ل ع}} = \frac{\text{ل}}{\text{ب}}$$

اس طرح حاصل ہوگا

$$\frac{\text{فرق ۲}}{\text{ح ۲}} (\text{ری} + \text{ل ط}) + (\text{ر} - \frac{\text{ل ع}}{\text{ب}}) (\text{ی} + \text{ل ط}) = 0$$

اور اگر (۴) کی اصلیں لہ لہ ہوں تو

$$(۵) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ی} + \text{ل ط} = \text{ج جم} \left\{ \frac{\text{ل ع}}{\text{ب}} - \text{ل ط} \right\} + \text{ت ع} \\ \text{ی} + \text{ل ط} = \text{ج جم} \left\{ \frac{\text{ل ع}}{\text{ب}} - \text{ل ط} \right\} + \text{ت ع} \end{array} \right.$$

ان سے ی اور ط پوری طرح معلوم ہو جاتے ہیں۔

نشا کی گہرائی اس شکل کے جلد سے حاصل ہوتی ہے

(۱۱۳)

$$\text{ج} + (\text{جم} + \text{مت} + \text{ع}) + \text{ب جم} (\text{مت} + \text{ب})$$

اور اس کی حرکت دو مختلف اهتزازوں پر مشتمل ہے جن میں سے ہر ایک قوانین ارتعاش کی پابندی کرتا ہے۔ یہ دونوں اهتزاز صغیر اهتزازات کے ہم وجود ہونے کے

۴۔ ایک مجوف نصف کرہ کو نزدیک افقی قطر کے گرد حرکت کر سکتا ہے سیال سے جزو بجز دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ صغیرا ہتزاز کا وقت وہی ہوگا جو اُس صورت میں ہوتا جبکہ اس میں سیال نہ ہو۔

۵۔ ایک ٹھوس ناقص ماپنے سے دو چند کثافت نوعی: لے اے میں تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کا چھوٹے سے چھوٹا محور انتصالی ہے چھوٹے انتصالی ہتزاز کا وقت معلوم کرو، نیز دوسرے دو افقی محوروں کے گرد صغیرا ذاتی ہتزازات کے اوقات معلوم کرو۔

۶۔ ایک کمبیل (جس کے کنارے کا طول ۱۲ ہے) سیال میں تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کا مرکز ثقل سیال کی سطح کے نیچے ب گہرائی میں ہے۔ اگر اس میں صغیر ہٹاؤ پیدا کیا جائے اس طرح کہ اس کے دورخ انتصالی میں ثابت کرو کہ اس کے صغیر انتصالی اور زاوی ہتزازات کے اوقات علی الترتیب ہونگے

$$2\pi \sqrt{\frac{b}{g}} \quad \text{اور} \quad 2\pi \sqrt{\frac{b+a}{g}} \quad \text{ج (۳ ب) - ۲}$$

۷۔ ایک اسطوانہ مائع میں انتصالی ہتزازات کر رہا ہے۔ یہ مائع ایک دوسرے اسطوانہ میں ہے جس کا نصف قطر اول الذکر کے نصف قطر کا $\frac{1}{n}$ کثا ہے۔ ثابت کرو کہ اسطوانہ کے محور کا فرق شدہ طول جبکہ وہ سکون کے محل میں ہو

$$2\pi \sqrt{\frac{b}{g}} - 2\pi \sqrt{\frac{b}{g}} (1 - \frac{1}{n^2})$$

ہوگا جہاں n ایک پورے ہتزاز کا وقت ہے۔
۸۔ ث کثافت کی ایک موم جی ث کثافت کے سکن پانی میں انتصالی تیر رہی ہے اس کو روشن کر دیا گیا اور دیکھا گیا کہ اس کا شعلہ پانی کی طرف یکساں رفتار سے اتر رہا ہے اور جی جس رفتار سے جل رہی ہے وہ وہی ثابت کرو کہ

$$v = \frac{1}{n} \sqrt{g}$$

نیز ثابت کرو کہ اگر جی کو اُس وقت بجا دیا جائے جبکہ اس کا طول l باقی رہے

تو جی پانی کے باہر اٹھ کر جائیگی اگر د < ماثل ج / ث یکن اگر

د > ماثل ج / ث تو اس کے استزادات کا وقت ۲۲ ماثل لی / ح ہوگا
 ۹ — ایک قائم مخروط انتصالی محور اور نیچے دار راس کے ساتھ سیال میں بیروبا
 ہے اور اس کے محور کا $\frac{1}{2}$ حصہ غرق ہے مخروط کے وزن کے مساوی ایک
 وزن اس کے قاعدہ پر رکھ دیا گیا ہے جس سے مخروط واپس اٹھنے کے پتیتر
 اتنا ڈوب جاتا ہے کہ اس کا محور پورا غرق ہو جاتا ہے ثابت کر دو کہ

$$ن^۳ + ن^۲ = ۷$$

۱۰ — ۲ زاویہ راس کا مخروط و نصف قطر کے استوانہ میں اس طرح تیر رہا ہے
 کہ اس کے محور کا طول و عرق ہے اگر اسکو ایک صغیر طول میں انتصالی نیچے ڈیکیل
 دیا جائے تو ثابت کر دو کہ اس کے استزادات کا وقت ہوگا

$$۲۲۲ \sqrt{\frac{۲۱}{۲۲}} (۲۱ - ۲۲ \text{ مس } ۲) \text{ ف}$$

۳۲ ج

جاں ف مخروط کا ارتفاع ہے -

۱۱ — ایک ظرف گردش مکافہ نما کی شکل کا ہے ، اس کا محور انتصالی ہے اور
 اس میں مائع کی اتنی مقدار ہے جسکا حجم اسی وتر خاص کے ایک مکافہ نما کے قطعہ
 کے حجم کے مساوی ہے جو اس مائع میں تیر رہا ہے - اگر اس مکافہ نما کو اٹھایا
 جائے کہ اس کا راس عین سطح پر ہو اور اگر چھوڑ دینے پر یہ اپنے محور کے $\frac{3}{4}$ کے
 مساوی گہرائی تک لوٹے سے قبل غرق ہو جائے تو ثابت کر دو کہ
 مائع کی کثافت : مکافہ نما کی کثافت :: ۴۸ : ۷

۱۲ — دئے ہوئے زاویہ راس کا ایک ٹھوس مخروط ایک ایسے محور پر تھما
 گیا ہے جس کے گرد یہ حرکت کر سکتا ہے اور جو مخروط کے قاعدہ کے ایک قطر
 پر منطبق ہوتا ہے - اگر محور کو افقی طور پر یکڑا جائے اور اتنا نیچے کیا جائے کہ مخروط
 کے حجم کا $\frac{1}{8}$ نیچے دار راس کے ساتھ ایک متجانس مائع میں غرق ہو جائے

فوائد اور مخروط کی کثافتوں میں نسبت معلوم کرو جبکہ توازن تعدیلی ہو۔
 اگر محور کو اتنا نیچے نہ کیا جائے کہ توازن تعدیلی ہو جائے اور پھر مخروط کو
 خفیف طور پر ہٹا دیا جائے تو صغیرا بہتر از کا وقت معلوم کرو۔
 ۱۳۔ ایک چمٹا (Oblate) کردہ نابوری طرح دو سیالوں میں غرق کر دیا
 گیا ہے۔ چکے سیال کی کثافت اصنافی اوپر کے سیال کی کثافت اصنافی کا دو چند ہے
 کرہ نما انصافی محور کے ساتھ تیرا ہے اور اس کا مرکز سیالوں کی مشترک سطح
 میں ہے۔

یہ فرض کر کے کہ صغیر ہٹاؤ واقع ہوتا ہے اولاً انصافی سمت میں اور انصافی
 اس کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والے افقی خط کے گرد ثابت کر، کہ صغیرا بہتر ازوں
 کے اوقات علی الترتیب ہونگے

$$۲۲ \sqrt{\frac{b^2}{c}} \text{ اور } ۲۲ \sqrt{\frac{a}{b} - \frac{b}{c} \times \frac{b^2 + c^2}{2b - c^2}}$$

جہاں تکوینی ناقص کے نصف محور b اور b ہیں۔

۱۴۔ ایک متجانس نفوس جسم ایک مانع میں جس کی کثافت ایسے بدلی ہے
 جیسے گہرائی کا عزم شدہ تیرا ہے اس کا مرکز ثقل گہرائی پر ہے۔ ثابت کرو
 کہ صغیرا انصافی بہتر از کا وقت $۲۲ \sqrt{\frac{a}{b} - \frac{b}{c}}$ ہے۔

۱۵۔ یکساں موٹائی کا ایک ہنر امساوی اساقین قائم الزاویہ مثلث کی شکل
 کا ہے۔ اس کا ایک حادہ زاویہ سیال کی سطح کے نیچے ثابت کر دیا گیا ہے اور یہ
 اس طرح ساکن ہے کہ اس کا وہ ضلع جو غرق نہیں ہے افقی ہے۔ ثابت کرو کہ
 اس کے اپنے مستوی میں صغیرا بہتر از کا وقت ہوگا

$$۲۲ \sqrt{\frac{a}{b} - \frac{b}{c}}$$

جہاں ثبات کے ہر ضلع کا طول b ہے۔

۱۶۔ ایک جسم کی کوئین شععی ۵۱ ، لا $\frac{b}{c}$ کو محور a کے گرد گھمانے سے

ہوئی ہے۔ یہ جسم تیر رہا ہے اس طور پر کہ اسکے محور کا حصہ ف غرق ہے۔ اگر اس کو بقدر $(n - \frac{1}{2})$ ف کے نیچے بٹھا دیا جائے تو ثابت کر دو کہ لوٹنے پر وہ عین نکل آئے گا۔

۱۷۔ م کیت کا ایک گردش جسم مختلف مائعات میں تیر رہا ہے اگر کسی مائع میں انتصابی اہتر از کے وقت ت اور اس مائع کی کثافت σ میں ربط

$$\sigma = \frac{1}{f} \left(\frac{1}{n} \right)$$

پایا جائے جہاں ف ایک دئے ہوئے تفاعل کو تغیر کرتا ہے تو ثابت کر دو کہ جسم کی نصف انہاری تراش کی مسادات ہوگی

$$\frac{1}{2} (n + m) = \int \frac{f}{h} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{m} \right)$$

۱۸۔ ایک یکساں فائے دھار پر عمود وار تراش ہر جگہ متساوی الما قین مثلث ہے جس کا نصف زاویہ راس 30° اور قاعدہ ب ہے۔ اسکی دھارائے کی سطح میں ثابت کر دی گئی ہے اور فائے اپنے سے دو چند کثافت نوسعی کے مائع میں تیر رہا ہے۔ پھر اس کو راس کے گرد ایک صغیر زاویہ طہ میں نیچے بٹھا دیا گیا ہے ثابت کر دو کہ اپنے ابتدائی محل پر لوٹ آنے کے لئے جو وقت درکار ہو گا وہ تقریباً یہ ہوگا

$$\frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \left\{ \frac{1}{m} \right\}$$

۱۹ جا (۳) گاما تفاعل کو تغیر کرتا ہے۔ مترجم

ماہیت

کرہ ہوائی کا دباؤ

(۱۱۶)

۱۰۹۔ اگر ایک شیشہ کی نلی آئرینیا تین فٹ لمبی جس کا ایک سرابند ہوا پارے سے بھری جائے اور پھر پارے کے ایک طرف میں انکار اس طرح رکھی جائے کہ اس کا کھلا سر اڈو ہوا پارے تو یہ معلوم ہوگا کہ نلی کے اندر پارہ کچھ اتر گیا ہے اور اس طرح ساکن ہے کہ اس کی اوپر کی سطح برتن کے پارہ کی سطح کے اوپر تقریباً ۲۹ انچ بلند ہے۔ یہ تجربہ جسکو پہلے طریسیلی (Torricelli) نے کیا باہر پیمانے کے استعمال کی طرف رہبری کرتا ہے جس سے کہ ہوائی کا دباؤ ناپا جاسکتا ہے۔

باریم اپنی سادہ ترین شکل میں ایک سیدھی شیشہ کی نلی ب ہے جس میں پارہ ہوتا ہے اور جس کا پچھلا سر پارہ کے ایک چھوٹے حوض میں ڈوبا ہوا رہتا ہے۔ سرابند ہوتا ہے اور بازو ا ب میں ہوا نہیں ہوتی۔



تجربوں سے یہ معلوم ہوا ہے کہ سطح ج کے اوپر پارہ کی سطح ب کا ارتفاع تقریباً ۲۹ انچ ہوتا ہے اور چونکہ سطح پ پر کوئی دباؤ نہیں ہو اس لئے یہ ظاہر ہے کہ ج پر ہوا کا دباؤ وہ قوت ہے جو پارہ کے ستون پ ق کو تھامے ہوئے ہے۔

ہم نے پہلے یہ بتایا ہے کہ ساکن سیال کا دباؤ افقی مستوی پر کے تمام نقطوں

بروز ہی ہوتا ہے اس لئے ج پر کا دباؤ ق پر پارہ کے دباؤ کے مساوی ہے۔
فرغ کر دو کہ پارہ کی کثافت نہ ہے اور ج پر کرہ ہوائی کا دباؤ π ہے تب
 $\pi = ج \times پ$

اور ارتفاع پ ق سے کرہ ہوائی کے دباؤ کی پیمائش ہوتی ہے۔
پارہ کی کثافت زیادہ ہونے کی وجہ سے یہ سب سے زیادہ موزوں سال
ہے جو بار پیمائش کی بناوٹ میں استعمال ہو سکتا ہے حالانکہ کرہ ہوائی کا دباؤ
کسی قسم کے مانع کے استعمال سے ناپا جا سکتا ہے۔ پارہ کی کثافت پانی کی
کثافت کا تقریباً 598 گنا ہے اور اس لئے پانی کے بار پیمائش میں پانی کے
ستون کا ارتفاع تقریباً 33 فٹ ہوگا۔

پارہ کی کثافت پیمائش کے ساتھ بدلتی ہے اور اس لئے نہ لازماً پیمائش کا
ایک تغاغل ہے۔

تجربہ سے یہ معلوم کیا گیا ہے کہ ہستی گریڈ کے اضافہ کے لئے پارہ کا پھیلاؤ
اپنے حجم کا $\frac{1}{55}$ گنا ہوتا ہے پس اگر پیمائش پر کثافت 33 اور پیمائش
پر کثافت 33 ہو تو

$$33 = 33 \times (1 + \frac{1}{55}) = 33 \times (1 + 0.01818) = 33.6$$

$$33.6 - 33 = 0.6 \text{ (ط ت) اگر } 33.6 = 33 \times (1 + \frac{1}{55})$$

$$33.6 = 33 \times (1 + \frac{1}{55}) \text{ اور } 33.6 - 33 = 0.6 \text{ (ط ت)}$$

ضابطہ $33 = ج (1 - ط ت)$ کی مدد سے کسی مقام پر کے کرہ ہوائی کے دباؤ
کی پیمائش ہو سکتی ہے بشرطیکہ عرض بلد کی تبدیلی سے ج کی قیمت میں جو
تبدیلی واقع ہوتی ہے اس کا لحاظ رکھا جائے۔ نیز یہ دیکھا گیا ہے کہ ایک ہی
مقام پر خواہ پیمائش بدلے یا نہ بدلے یہ دباؤ بدلتا ہے اور پیمائشوں پر چڑھنے میں
یا کسی مقام کی ہوائی سے اوپر کسی ذریعہ سے صعود کرنے میں یہ دباؤ گھٹتا ہے۔
یہ بات سیالات کے توازن کے نظریہ کے مطابق ہے کیونکہ اوپر چڑھنے میں

بار پیمائے کے اوپر ہوا کے ستون کا ارتفاع گھٹ جاتا ہے اور اس لئے ج پر ہوا کا دباؤ جو اس کے اوپر کی ہوا کے ستون کے وزن کے مساوی ہے گھٹ جاتا ہے اور اس لئے نلی میں پارہ نیچے اترتا ہے۔

اب اگر پارہ کے ارتفاع اور اس ارتفاع میں جس میں کہ صعود واقع ہوتا ہے ایک ربط معلوم ہو جائے تو ظاہر ہے کہ ایک ہی وقت میں دو مقامات پر بار پیمائی ستونوں کے مشابہات سے ہم ان مقامات کے ارتفاعوں میں فرق معلوم کر سکتے ہیں۔

اس مقصد کے لئے ہم ایک ضابطہ کی تلاش کرینگے۔ لیکن پہلے ہم ان قوانین کا بیان کر دینا ضروری سمجھتے ہیں جو مختلف تپشوں پر ہوا اور گیسوں کے دباؤں میں ضبط پیدا کرتے ہیں اور نیز ان قوانین کا جو گیسوں کے آمیزوں سے متعلق ہیں۔

۱۱۰۔ ہم نے پچھلے درسیال کے دباؤ، کمخافت اور تپش کے درمیان اس رشتہ

$$d = m \cdot t \quad (1 + \epsilon \cdot t)$$

کو پہلے بیان کیا ہے۔ یہ تجربہ کے دو حسب ذیل نتیجوں سے اخذ کیا گیا ہے۔
(۱) اگر تپش مستقل رہے تو ہوا کا دباؤ اس کے حجم کے بالعکس بدلتا ہے۔
(کلیہ بائل)

(۲) اگر دباؤ مستقل رہے تو ہوا کی کسی کمیت کی تپش میں اسے سنٹی گریڈ کا اضافہ اس میں اتنا پھیلاؤ پیدا کرتا ہے جو اس کے صفر درجہ سنٹی گریڈ پر کے حجم کا ۳۶۹۵۔۵ گنا ہوتا ہے۔
(ڈالٹن اور گے لوک کا کلیہ)

اس طرح اگر ہوا کا دباؤ اور کمخافت ثابت ہو جبکہ تپش صفر ہے تو

$$d = m \cdot t$$

اب فرض کرو کہ تپش کو ت تک بڑھایا جاتا ہے جبکہ دباؤ وہی رہتا ہے۔ اس کو سمجھنے کے لئے فرض کرو کہ ہوا ایک اسطوانہ میں ہے جس میں ٹھیک بیٹھنے والا قابل حرکت ایک فشارہ لگا ہوا ہے۔ اور اس فشارہ پر ایک مستقل قوت لگی ہوئی ہے

اس طرح ہوائی پمپ کا قوت میں اعناؤ فشارہ کو باہر ڈھکیلنے کا اثر رکھتا یہاں تک کہ کثافت کی تخفیف سے اور اس لئے متناظر دباؤ کی تخفیف سے توازن برقرار ہو جائے۔ تب کلیہ دوم سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ث} = (1 + \text{ع ت})$$

جہاں ت نئی کثافت ہے اور $\text{ع} = 3.695 \times 10^{-5}$

$$\text{د} = \text{م} \text{ ث} (1 + \text{ع ت})$$

اگر ت پشرا یہ اسی سیال کا دباؤ د اور کثافت ث ہو تو

$$\text{د} = \text{م} \text{ ث} (1 + \text{ع ت})$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{د}}{\text{ث}} = \frac{\text{م} (1 + \text{ع ت})}{1 + \text{ع ت}}$$

تمام اقسام کی کیسوں کے لئے مقدار عد تقریباً وہی ہوتی ہے، لیکن م کی قیمت مختلف کیسوں کے لئے مختلف ہوگی۔ اس لئے ہر صورت میں تجربہ کی مدد سے اس کو معلوم کرنا چاہیئے۔

۱۱۱۔ تپش مطلق۔ اگر ہم یہ تصور کریں کہ کیس کی تپش کو اتنا گھٹا دیا گیا ہے کہ اس کا دباؤ حجم کی تبدیلی کے بغیر معدوم ہو جاتا ہے تو ہم تپش کے مطلق صفر پر پہنچتے ہیں اور تپش مطلق اس نقطہ سے باقی جاتی ہے۔

ہمان کر کہ ت اس تپش کو سنٹی گریڈ تپش یا پیر بغیر کرتا ہے میں مساوات $1 + \text{ع ت} = 0$ سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ت} = - \frac{1}{\text{ع}} = - 273.15$$

فارن ہائیٹ کے برابر میں مطلق صفر - 273.15 ہوگا۔

$$\text{مساواتوں} \quad \text{د} = \text{م} \text{ ث} (1 + \text{ع ت})$$

$$\text{م} = 0 \quad \text{ث} (1 + \text{ع ت})$$

(۱۱۹)

سے حاصل ہوتا ہے $d = m \cdot \theta \cdot r$ (ت - ت)

$m \cdot \theta \cdot r$

اگر تپش مطلق ہو۔

چونکہ θ مستقل ہے اسلئے $d \propto r$ / θ بھی مستقل ہے اور یہ کلیہ مطلق
پیمانہ میں، دباؤ حجم اور تپش کے ربط کو ظاہر کرتا ہے۔
۱۱۲۔ آمیزے۔ مختلف چکدار سیالوں کے آمیزے کا دباؤ۔

دو مختلف گیسوں پر غور کرو جو دو ظرفوں میں ہیں جن کے حجم V اور P ہیں۔
اور فرض کرو کہ ان کے دباؤ اور تپشیں d اور θ دونوں کے لئے ایک ہی ہیں۔
فرض کرو کہ ان دو ظرفوں میں الحاق پیدا کیا گیا یا دونوں گیسوں کو ایک
بند ظرف میں جس کا حجم $V + V$ ہے متقل کر دیا گیا ہے۔ ایسی صورت میں جبکہ
ان میں کوئی کیمیائی عمل وقوع پذیر نہیں ہوتا یہ معلوم ہوا ہے کہ دونوں گیسوں علیحدہ
نہیں رہتیں بلکہ ایک دوسرے میں نفوذ کرتی ہیں حتیٰ کہ وہ ایک دوسرے سے
پوری طرح لمباتی ہیں اور یہ کہ جب توازن قائم ہو جاتا ہے تو آمیزے کے دباؤ اور
تپش دونوں وہی ہوتے ہیں جو پہلے تھے۔

اس اہم تجربہ کی واقعیت سے ہم حسب ذیل مسئلہ اخذ کر سکتے ہیں۔

اگر دو گیسوں کو جن کی تپش وہی ہے ایک ظرف میں جس کا حجم V ہے ملا دیا
جائے۔ اور اگر ان گیسوں کے دباؤ d اور θ ہوں جبکہ ان کو فرداً فرداً حجم
 V والے ظرف میں داخل کیا جائے تو آمیزے کا دباؤ $d + d$ رہے گا۔

فرض کرو کہ دونوں گیسوں کو ایک دوسرے سے جدا کر دیا گیا ہے اور اس گیس
کے حجم میں جس کا دباؤ d ہے تپش کی تبدیلی کے بغیر اتنا تغیر کر دیا گیا ہے
کہ اس کا دباؤ d ہو جاتا ہے۔ تب کلیہ بائیل کی رو سے اس کا حجم $V + V$ ہوگا۔
اب فرض کرو کہ ان دو گیسوں کو ایک ظرف میں جس کا حجم

$$V + V \text{ یا } \frac{d}{d} + \frac{d}{d} = \frac{d}{d}$$

ہے ایک دوسرے سے ملا دیا گیا ہے تب آمیزے کا دباؤ وہی د ہوگا اور
تپش غیر متغیر رہے گی۔ اب اگر آمیزے کو حجم ح میں دما دیا جائے تو اس کا دباؤ
کلیہ بائل کے روئے د + د ہوگا۔

یہ نتیجہ صریحاً گیسوں کے کسی تعداد کے آمیزہ پر صادق آتا ہے۔

۱۱۳۔ دو مختلف گیسوں کے حجم ح ح ہیں اور ان میں کے دباؤ علی الترتیب
د + د ہیں۔ ان کو ایک دوسرے سے اس طرح ملا دیا جائے کہ ان کے آمیزے
کا حجم ع ہو جائے۔ آمیزے کا دباؤ معلوم کرنا مطلوب ہے۔

دونوں گیسوں کے دباؤ جبکہ ان کو حجم ع میں محدود کیا جائے علی الترتیب

$$\frac{ح}{۶} د + \frac{ح}{۶} د$$

اور اس لئے دفعہ ماہی سے آمیزے کا دباؤ

$$\frac{ح}{۶} د + \frac{ح}{۶} د$$

ہے اور اگر یہ دباؤ د سے تعبیر کیا جائے تو

$$د = ۶ = د ح + د ح$$

لانے کے پیئر اگر گیسوں کی مطلق تپشیں ت اور ت ہوں اور ملائے کے بعد
تپش مطلق ت ہو جائے اور حجم ع تو گیسوں کے دباؤ علی الترتیب ہونگے

$$\frac{د ح}{ت} \text{ اور } \frac{د ح}{ت}$$

پس آمیزے کا دباؤ د ان دو مقداروں کا حاصل جمع ہوگا اور اس لئے

$$\frac{د ح}{ت} + \frac{د ح}{ت} = \frac{۶ د}{ت}$$

گیسوں کے کسی تعداد کے آمیزے کی صورت میں

$$\frac{H}{T} = \frac{P}{T}$$

۱۱۴۔ دفات ماسبق کے نتیجے اور کھینے بخارات کی صورت میں اُسی طرح صادق آتے ہیں۔ بخارات اور گیسوں کے جیلی خصوصیات میں بالفاظ ان کے کیمیائی خصوصیات کے صرف یہ فرق ہے کہ قبل الذکر آسانی کے ساتھ، تپش کی تخفیف سے، مانع میں تبدیل ہو جاتے ہیں اور موزلہ ذکر کی تکلیف صرف بہت بڑے دباؤ یا انتہائی ٹھنڈک یا دونوں کے ایک ساتھ استعمال سے ہو سکتی ہے۔

۱۱۵۔ بخار۔ اگر ایسی فضا میں جس میں خشک ہوا ہے پانی داخل کیا جائے تو بھاپ فوراً بن جاتی ہے اور یہ معلوم ہوا ہے کہ بھاپ کی کثافت اور دباؤ صرف تپش پر منحصر ہوتے ہیں اور ہوا کی کثافت پر منحصر نہیں ہوتے۔ پس اگر ہوا کو خلیج بھی کر دیا جائے تو بھاپ کی کثافت اور دباؤ وہی برقرار رہیں گے۔ اگر تپش میں اضافہ کیا جائے یا فضا میں وسعت پیدا کی جائے تو بھاپ کی مزید مقدار تیار ہو جائے گی۔ لیکن اگر تپش کو گھٹا دیا جائے یا فضا کو کم کر دیا جائے تو بھاپ کا کچھ حصہ مکث ہو جائیگا۔

(۱۲۱)

۱۱۶۔ ہر مضر فیاریڈے نے کاربانک ایسڈ گیس اور دوسری گیسوں کو جن کی تکلیف کے لئے بہت بڑے دباؤ کی ضرورت تھی کثافت کرنے میں کامیابی حاصل کی اور اس کے تجربہ کے نتائج سے یہ خیال پیدا ہوا کہ بہت ممکن ہے کہ تمام گیسوں، اُنات کے بخارات ہوں۔ اس کی بہت کچھ تاہم ۱۸۷۸ء میں ہوئی جبکہ ایم۔ پی کیٹ (M. Pictet) نے اُس سال کے اوائل میں ۳۰۰ کرہ ہوائی کے دباؤ کے ذریعہ عمل کیسجن کو مانع میں تبدیل کیا اور اسی سال کے ماہ دسمبر میں ایم کیلٹٹ (M. Cailliet) نے نیتروجن اور ہوا کو مانع میں تبدیل کیا۔ ۱۸۸۳ء میں ادوب لوسکی (Wroblewski) نے ہائیڈروجن کو مانع بنایا اور ۱۸۹۹ء میں ڈوار (Dewar) نے ٹھوس ہائیڈروجن حاصل کی اور اب ہوا اور دوسری مختلف گیسوں مانع کی شکل میں تجارتی اشتہار ہیں۔

فضائیں جب تک پانی کی کافی مقدار باقی رہے جس سے بھاپ بن سکتی ہے فضا بھاپ سے ہمیشہ سیر شدہ ہوگی یعنی فضا میں اسی بھاپ ہوگی جتنی کہ اس تپش پر اس فضا میں رہ سکتی ہے۔ لیکن اگر تپش کو اتنا بڑا دیا جائے کہ تمام پانی بھاپ بن جائے تو اس تپش اور اس سے اعلیٰ تپشوں کے لئے بھاپ کا دباؤ اسی کلیہ کی پابندی کرے گا جس کلیہ کی ہوا کا دباؤ پابندی کرتا ہے۔

ہر صورت میں خواہ فضا سیر شدہ ہو یا نہ ہو اگر ہوا کا دباؤ ۵ اور بھاپ کا ۵ ہو تو آمیزے کا دباؤ ۵ + ۵ = ۱۰ ہوگا۔

۱۱۴۔ کہ ہوائی میں ہمیشہ آبی بخار موجود ہوتا ہے جس کی مقدار مختلف اوقات پر مختلف ہوتی ہے کبھی کم اور کبھی زیادہ۔ اگر کہ ہوائی کی فضا کا کوئی حصہ بخار سے سیر کر دیا جائے یعنی اگر بخار کی کثافت اس تپش پر جتنی بڑی ہو سکتی ہے اتنی ہو جائے تو تپش کو گھٹانے سے بخار کے کچھ حصہ کی تکلیف ہو جائے گی لیکن اگر اس تپش پر بخار کی کثافت کثافت اعظم نہ ہو تو کوئی تکلیف وقوع پذیر نہ ہوگی جب تک کہ تپش کو اس نقطہ کے نیچے تک نہ گھٹا دیا جائے جس پر فضا میں تکلیف شروع ہو جاتی ہے۔

شبیم کی پیدائش۔ اگر کسی سطح کو جو کہ ہوائی سے تماس رکھتی ہے اتنا سرد کر دیا جائے کہ اس کی تپش اس کے نزدیک کی فضا کے سیر شدہ ہونے کے نقطہ سے نیچے ہو جائے تو آبی بخار کی تکلیف رونما ہوگی اور کثافت بخار سطح پر شبیم کی شکل میں نمودار ہوگا۔ اس لئے زمین پر شبیم کی پیدائش اسکی سطح کے ٹھنڈے ہوئے پر منحصر ہے اور یہ عملی طور پر زیادہ سرعت سے اس وقت ہوتا ہے جبکہ آسمان پر بادل نہ ہوں اور اس لئے اشعاع کے ذریعہ حرارت کا متبادل زیادہ نقصان ہو تا ہو۔

نقطہ شبیم وہ تپش ہے جس پر شبیم ابتداً پیدا ہونا شروع ہوتی ہے اس کا تعین بالراست آسان ہے سے کرنا پڑتا ہے۔

(۱۲۲) مختلف تپشوں پر جو بخار کو سیراب کرنے والی کثافتیں ہیں ان کے جواب میں بخار کا دباؤ بھی تجربہ سے معلوم کر لینا چاہیے اور اگر ایسا کیا جائے تو نقطہ شبیم

کے مشاہدے سے کہ ہوائی میں بخار کا دباؤ فوراً معلوم ہو سکتا ہے کیونکہ اگر نقطہ ختم
تسا اور اس کے متناظر معلومہ دباؤ ڈ ہو تو کسی تپش ت پر جو ت کے اوپر ہے
دباؤ د سادات

$$\frac{D + 1}{D} = \frac{t + 1}{t}$$

سے معلوم ہو جائیگا۔

۱۱۷۔ گیس کی تپش اور دباؤ پر چپکا ڈیا بے ط کا اثر۔

تجربہ سے یہ معلوم ہوا ہے کہ اگر ہوا کی کسی مقدار کو جو ایک ایسے ظرف
کے اندر بند ہے جس میں حرارت داخل نہیں ہو سکتی چپکا یا جائے تو اس کی
تپش بڑھ جاتی ہے اور یہ کہ اگر ہوا کی کسی مقدار کو خواہ وہ کسی قسم کے ظرف میں
بند ہو یکا یک چپکا دیا جائے اس طرح پر کہ حرارت کو باہر نکلنے کا موقع نہ ملے تو اس
صورت میں بھی تپش اسی طرح بڑھ جاتی ہے۔

۱۱۸۔ استعداد حرارت۔ کسی جسم کی استعداد حرارت، حرارت کی وہ مقدار
ہے جو اس کی تپش کو ایک درجہ بڑا دینے میں مطلوب ہوتی ہے۔

حرارت کی اکائی جو عملاً استعمال ہوتی ہے حرارت کی وہ مقدار ہے جو پانی
کی اکائی کیت کی تپش میں ایک درجہ کا اضافہ پیدا کر دے جبکہ پانی کی تپش
سنتی گریڈ اور ۳۲ سنتی گریڈ کے درمیان ہو۔

حرارت نوعی۔ کسی جسم کی حرارت نوعی اس کی کیت کی ایک اکائی کی
استعداد حرارت ہے یا بالفاظ دیگر حرارت نوعی وہ نسبت ہے جو حرارت کی اُس
مقدار کو جو جسم کی تپش کو اُڑ یا دینے میں مطلوب ہوتی ہے حرارت کی اُس
مقدار کے ساتھ ہو جو مساوی وزن کے پانی کی تپش کو ایک درجہ بڑا دینے میں
درکار ہوتی ہے۔

اگر حرارت کی مقدار فرق کیت کی ایک اکائی میں فروت تپش کی تبدیلی پیدا
کر دے تو حرارت نوعی کا ناپ فروت ہوگا۔

گیسوں میں ۱۰ صورتوں پر غور کرنا ضروری ہے (۱) جبکہ دباؤ مستقل رہے، اور گیس کو پھینک دیا جائے (۲) جبکہ حجم مستقل رہے۔
ان دو صورتوں میں حرارت نوعی کو اتم رموز ج د اور ج ح سے تعبیر کریں گے۔

یہ دیکھ لینا آسان ہے کہ ج ح سے بڑا ہے کیونکہ پہلی صورت میں حرارت جو گیس کو دہی گئی ہے گیس کے پھیلائے میں بھی کام کرتی ہے اور اس کی قوت کے بڑھانے میں بھی۔

۱۱۹ — حرنا گذر پھیلاؤ — گیس کی دہی ہوئی مقدار کے پچکاؤ یا بسط کا اثر دیا کرے میں یہ ظاہر ہے کہ حرارت مطلوبہ ج د اور د کا تفاعل ہوگی اور چونکہ ج د د د اس سے کسی پھیلاؤ کے لئے حرارت مطلوبہ ج د اور د کا تفاعل ہوگی۔ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\text{فرق} = \frac{\text{جفت ق}}{\text{جفت د}} + \text{ج ح}$$

اور بالعموم د = م د ع ت یا اگر گیس کی دہی ہوئی مقدار کی کمیت کو کمیت کی اکائی مانا جائے تو

$$\text{ج د} - \text{م د ع ت} = \text{ل ت}$$

اگر دباؤ مستقل ہو تو فرق = ج د حر ت

$$\frac{\text{جفت ق}}{\text{جفت ح}} = \frac{\text{ج د حر ت}}{\text{ج د حر ت}}$$

$$\frac{\text{جفت ق}}{\text{جفت ح}} = \frac{\text{ج د}}{\text{ل}}$$

اگر حجم مستقل ہو تو

$$\frac{\text{جفت ق}}{\text{جفت د}} = \frac{\text{ج د حر ت}}{\text{ج د حر ت}}$$

$$\text{اور } \frac{\text{ج ح}}{\text{ج د}} = \frac{\text{ج ح}}{\text{ج د}}$$

اس لئے اگر کوئی حرارت نہ پہنچائی جائے یعنی اگر فرق = ۰ تو

$$\frac{\text{ج د}}{\text{ج ح}} = \frac{\text{ج د}}{\text{ج ح}} = ۰$$

$$\therefore \frac{\text{ج د}}{\text{ج ح}} \times \text{ج ح} = \text{مستقل ہے}$$

اگر ج ح کو ج د کے ساتھ جو نسبت ہے اس کو مستقل مانیں۔
اگر د ح تغیر یا کر د ح ہو جائیں تو حاصل ہوگا

$$\frac{\text{د ح}}{\text{ج ح}} = \left(\frac{\text{ج ح}}{\text{ج ح}} \right)$$

جہاں ج د = ج د / ج ح ، اور سبز حاصل ہوگا

$$\frac{\text{ت}}{\text{د ح}} = \frac{\text{د ح}}{\text{ج ح}} = \left(\frac{\text{ج ح}}{\text{ج ح}} \right)^{۱-}$$

مسادات د ح ج = مستقل ، حرکیات میں حرنا گد ر خطوط کی مسادات
ہے اور یہ گیس کی کسی کمیت کے حجم اور اس کے دباؤ کے درمیانی ربط کو تعبیر
کرتی ہے جبکہ حجم میں تغیر کے وقت نہ کوئی حرارت ضائع ہو اور نہ پہنچائی جائے۔
ہوا کی کسی کمیت کے یکا یک پھیلاؤ یا پچکاؤ کی صورت میں بھی مسادات
بالا درست رہتی ہے کیونکہ حرارت کے قابل قدر نقصان یا بیرونی مآخذوں سے حرارت
کے اکتساب کے لئے کافی وقت نہیں ملتا۔ یہ معلوم ہوگا کہ ربط بالا آواز کے نظریہ
میں بہت زیادہ اہمیت رکھتا ہے۔

۱۲۰ — ج د ، ج ح مستقل — اصول توانائی کی مدد سے یہ بتایا جاسکتا ہے کہ (۱۲۴)

کسی گیس کے لئے ج ، اور ج ح کا فرق مستقل ہوتا ہے۔

حرکیات کے ایک کلیہ کی رو سے کسی نظام میں حرارت کے

استعمال سے جو ہوائی اٹار لی جاتی ہے وہ دروازہ کی مقدار کے مساوی ہوتی ہے۔
پس اگرچہ اسے کسی اکائی کا حلی معادل غ ہو اور لیس کی اکائی کیست میں
حرارت کا اندازہ نہ ہو۔

غ × ح = حرارت

لیکن یہ توانائی کچھ بدلتے ہوئے حجم پر پیش لے بڑھے میں صرف ہوتی ہے
اور کچھ اس حجم کے پھیلائے میں۔

$$\therefore \text{غ} \times \text{ج} = \text{حرارت} = \text{دفرح} + \text{غ} \times \text{ج} = \text{حرارت}$$

$$\text{دفرح} = \text{حر} - \text{ل} = \text{ت}$$

$$\therefore \text{غ} (\text{ج} - \text{ج} = \text{ل}) = \text{ل}$$

جس سے ظاہر ہے کہ ج - ج مستقل ہے۔
ہم اس مساوات سے دفعہ (۱۱۹) کا نتیجہ حاصل کر سکتے ہیں۔
کیونکہ اگر کوئی حرارت نہ پہنچائی جائے تو کوئی توانائی داخل نہیں ہوگی۔

$$\text{اور} \therefore \text{دفرح} + \text{غ} \times \text{ج} = \text{حرارت} =$$

$$\text{لیکن} \text{حر} = \text{ل} = \text{ت} = \text{غ} (\text{ج} - \text{ج} = \text{ت})$$

$$\therefore \text{دفرح} + \text{حر} = \text{دفرح} + \text{غ} (\text{ج} - \text{ج} = \text{ت}) = \text{حرارت}$$

$$\text{اور} \text{دفرح} (\text{ج} - \text{ج} = \text{ت}) + \text{ج} (\text{دفرح} + \text{حر} = \text{ت}) =$$

$$\text{جس سے} \text{ج} + \text{دفرح} + \text{ج} \times \text{حر} = \text{ت} \times \text{ج} = \text{ت} \times \text{ج}$$

۱۲۱۔ گیس کے حرارت گذر بچکاؤ میں جو کام ہوتا ہے اس کا معلوم کرنا۔

دفعہ ۴۱ میں ہم نے یہ مان لیا تھا کہ پیش مستقل ہے یا باغاط دیگر یہ کہ بچکاؤ

مرکز سے ایک خاص فاصلے پر اس کی کشش ہوا کے ذروں کو دائری مدار میں رکھنے کے
مقابل ہوگی۔ لیکن ذروں کا ان مداروں کو مرہم کرنا ضروری ہے تاکہ اضافی توازن
کی حالت قائم رہ سکے۔

خط استوا پر حملہ سہار، $\frac{ج}{۲۸۹}$ کے مساوی ہے جہاں سہ زمین کی دائری
رفتار ہے اور اس لئے $ی$ ارتفاع پر وہ قوت جو ہوا کے ذرہ کی تک کو
اپنے دائری حرکت میں رکھنے کے لئے درکار ہو ک $ج(۱ + ی)$ کے ۲۸۹ رکے
مساوی ہوگی۔ اسی ارتفاع پر زمین کی کشش

$$\frac{ک ج ر}{۲(۱ + ی)} =$$

اور اس لئے انتہائی ارتفاع مساوات دہل سے حاصل ہوگا

$$\frac{ی + ۱}{۲۸۹} = \frac{ر}{۲(۱ + ی)}$$

$$یا \quad ی = ر \{ ۱ - \frac{۲}{۲۸۹} \}$$

یعنی $ی$ ، ۵ سے کس قدر بڑا ہے۔

ممکن ہے کہ یہ ارتفاع اصلی ارتفاع سے بہت زیادہ ہو کیونکہ غباروں میں
تجربات کی بنا پر معلوم ہوا ہے کہ اوپر چڑھتے وقت ہوا کی تیش بہت زیادہ سرعت
کے ساتھ گھٹتی جاتی ہے اور اس لئے یہ بالکل ممکن ہے کہ ۵ سے کم ارتفاع
پر ہوا بیکسرودی کی وجہ سے مانع میں تبدیل ہو گئی ہو اور اس لئے اسکی بیرونی سطح
ایسی صورت میں اُسی قسم کی ہوگی جس قسم کی غیر یکجہ اور سیالوں کی سطحیں ہوا کرتی ہیں۔

بارہیمیا کے ذریعہ ارتفاعوں کا معلوم کرنا

۱۲۳۔ بارہیمیا کے سیابی ستون کے ارتفاع اور سطح سمندر کے اوپر اس بارہ کے
ارتفاع کے درمیان ربط قائم کرنے وقت ہمیں کرہ ہوائی کی تیش کے متعلق ایک
مفروضہ قائم کر لینا چاہیئے۔

اول فرض کرو کہ تپش مستقل ہے اور y ارتفاع پر دباؤ اور کثافت d ، z سے تعبیر ہوتے ہیں اور y ارتفاع پر ان کی قیمتیں z ، z ہیں۔ تب توازن کی مساواتیں ہوں گی

$$\text{فرد} = - \text{ج} \text{ ش فری}$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{ش}}{\text{ج}} = \frac{\text{د}}{\text{م}} = \text{م}$$

$$\text{م لوک د} = \text{م} - \text{ج ی}$$

$$\text{لوک} \frac{\text{د}}{\text{ج}} = \frac{\text{د}}{\text{م}} (\text{ج ی} - \text{ی})$$

(۱۲۰) نیز اگر z ، z سے دو مقامات پر کے ماریاؤں کے ارتفاع تعبیر ہوں اور ان مقامات کے ارتفاع y اور y ہوں تو

$$\text{ی ی} - \text{ی} = \frac{\text{م}}{\text{ج}} \text{ لوک} \frac{\text{د}}{\text{ج}} = \frac{\text{م}}{\text{ج}} \text{ لوک} \frac{\text{د}}{\text{ج}} \quad (۱)$$

اگر تپش مستقل نہ ہو تو فرض کرو کہ ان دو مقامات پر تپش z ، z ہیں۔ اب اگر ان دو مقامات کی بلندیوں کے درمیان، اوسط یکساں تپش z = $\frac{1}{2}(z + z)$ کا معدوم اختیار کیا جائے تو d اور z میں ربط $d = \text{م} \text{ ش} \times (۱ + \text{ع} \text{ ت})$ حاصل ہوگا اور مساوات (۱) ہو جائیگی

$$\text{ی ی} - \text{ی} = \frac{\text{م}}{\text{ج}} \left\{ ۱ + \frac{۱}{۲} \text{ع} \text{ ت} + \frac{۱}{۲} \text{ع} \text{ ت} \right\} \text{ لوک} \frac{\text{د}}{\text{ج}} \quad (۲)$$

اور اگر دونوں مقامات پر ماریاؤں کے اندرونی یاہ کی تپشوں کے فرق کو بھی ملحوظ رکھا جائے تو دفعہ (۱۰۹) سے

$$\frac{\text{د}}{\text{ج}} = \frac{\text{ف} (۱ - \text{ط} \text{ ت})}{\text{ف} (۱ - \text{ط} \text{ ت})} ، \quad \text{جہاں} \text{ ط} = ۱۸۰.۱۸ \dots$$

اور مساوات (۲) ہو جائیگی

$$\text{جی۔ سی} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} (ت + ت') \right\} \text{ لوک } \frac{ت (1 - ط ت)}{ت' (1 - ط ت')} \quad (۳۱ \dots)$$

۱۲۵۔ لیکن اگر سطح زمین کے اوپر ارتفاع کافی زیادہ ہوں تو یہ ضروری ہے کہ زمین کے مرکز سے مختلف فاصلوں پر جاذبہ ارض کے تغیر کو بھی ملحوظ رکھا جائے۔ اس لئے ہم زیادہ صحیح صابطہ کی تلاش کرتے ہیں۔

فرض کر دو کہ سطح بحر پر جاذبہ ارض کا ناپ ج ہے اور زمین کا نصف قطر ہے تو ارتفاع جی پر تجاذبی قوت

$$\frac{ج}{(ج + ر)^2}$$

سے نیلی جائیگی۔ اور توازن کی مساوات ہوگی

$$\text{فرد} = ج - ج \frac{ج}{(ج + ر)^2} \text{ ث فری}$$

نیز ہم جانتے ہیں کہ $ج = م \text{ ث } (1 + ع ت)$ اور یہاں یہ دیکھ لینا ضروری ہے کہ درحقیقت ہوا کے دباؤ اور آبی بخار (جو ہوا میں شامل ہے) کے دباؤ کا مجموعہ ہے۔

پس اگر آبی بخار کی کثافت $ث$ ہو تو ذیل کی شکل کی دو مقداروں کا مجموعہ ہوگا

$$م \text{ ث } (1 + ع ت) + م \text{ ث } (1 + ع ت)$$

اور اس لئے مساوات با ۱۲ میں مقدار $م \text{ ث}$ درحقیقت دو مقداروں $م \text{ ث}$ ، (۱۲۸)

$م \text{ ث}$ کا مجموعہ ہے جو علی الترتیب ہوا اور آبی بخار کے جواب میں ہیں۔

اوپر کی دو مساواتوں سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{فرد} = \frac{1}{ج + ع ت} - ج \frac{ج}{(ج + ر)^2} \text{ ث فری}$$

یہ پوری صحت کے لحاظ سے یہ بہتر ہوگا کہ $م \text{ ث}$ کی بجائے $م \text{ ث}$ لکھا جائے جہاں $ث$ حالص ہوا کی کثافت ہے۔

اور گزشتہ کی طرح ہم اب کو مستقل اور ان دو مقامات پر کی تبدیلیوں کے
اوسط کے مساوی مانیں گے۔
تکمل سے

$$\text{م لوک د} = \frac{1}{1 + \text{عت}} \frac{\text{ج}^2}{r + y} + \text{ہر}$$

اور .. م لوک د = $\frac{\text{ج}^2 (y - y_1)}{(1 + \text{عت}) (r + y) (r + y_1)}$ (۱)
فرض کرو کہ گزشتہ کی طرح پارہ کے مشابہ کردہ ارتفاعات افت اور تبشیں
تساوی ہیں۔ تب چونکہ ہی ارتفاع پر حادثہ ارض کی قوت مقدار $\frac{\text{ج}^2}{r + y}$
سے ناپی جاتی ہے اسلئے

$$D = \frac{\text{ج}^2}{r + y} \text{ ث ف (۱ - ط ت)}$$

$$D - \frac{\text{ج}^2}{r + y} \text{ ث ف (۱ - ط ت)}$$

$$D = \frac{\text{ج}^2}{r + y} \left(\frac{1 - \text{ط ت}}{1 - \text{ط ت}} \right) \text{ ث ف (۱ - ط ت)} \quad (۲)$$

اب چونکہ ط ایک بہت چھوٹا مقدار ہے اسلئے

$$y - y_1 = \frac{m(1 + \text{عت})}{\text{مرج}} \frac{(r + y) - (r + y_1)}{(r + y)} \left\{ \text{لوک د} + \frac{2}{r + y} \text{ لوک د} - \text{مرط (ت - ت)} \right\}$$

جہاں مر = لوک د = ۳۵ ۲۹ ۳۳ ۳۳ ۳۳

اس ضابطہ سے اگر ہی معلوم ہو تو ہی کی قیمت محسوب کیجا سکتی ہے۔ اگر بخلا
مقام سطح بحر کے قریب واقع ہو ہی = ۰ اور

$$y = \frac{m(1 + \text{عت})}{\text{مرج}} \frac{(r + y)}{(r + y)} \left\{ \text{لوک د} + \frac{2}{r + y} \text{ لوک د} - \text{مرط (ت - ت)} \right\}$$

۱۲۶۔ گزشتہ تحقیقات میں ہم نے سطح زمین کے مختلف حصوں پر جاذبہ ارض کے تعبیر کا کوئی لحاظ نہیں کیا ہے۔ زمین کی لہر نمائی شکل اور اپنے محور کے گرد اس کی گردش کی وجہ سے جاذبہ ارض کی قوت کی قیمت مختلف عرض بلد پر مختلف ہوتی ہے اور زمین کے پھلکے کی ساحت کے باعث زمین اور سمندر پر اس کی قیمت مختلف ہوتی ہے اور نیز یہ معلوم کیا گیا ہے کہ بحر سی چھوٹے جزیروں پر براعظموں کی بہ نسبت اس کی قیمت زیادہ ہوتی ہے۔ (۱۲۹)

ج کی اوسط قیمت کے لئے ایک جدید ضابطہ

$$ج = ۹۷۸۵۰۴۶ + ۰۰۵۳۰۲۰۲ \times جب ذ - ۰۰۰۰۰۰۰۰ \times جب ۲ ذ) / (سم/ثانیہ)$$

یا ج = ۹۸۰۵۶۳۲ - ۰۰۲۶۴۴۴ \times جم ذ + ۰۰۰۰۰۰۰۰ \times جم ۲ ذ) / (سم/ثانیہ)
حاصل ہوا ہے جہاں ذ عرض بلد ہے اور خط استوا اور عرض بلد ۴۵ پر ج کی قیمتیں بالترتیب ۹۸۰۵۶۳۲ اور ۹۷۸۵۰۴۶ ہیں۔

اگر ہم ج = ۹۸۰۵۶ - ۰۰۲۶۴۴۴ \times جم ۲ ذ) / (سم/ثانیہ) لیں تو ی کے لئے جو آخری جملہ ہم نے حاصل کیا ہے وہ ہو جائیگا

$$م = (۱ + عت) (۱ + ی/ر) \times \left\{ \frac{۱}{۱ + ی/ر} + ۲ \times \frac{۱}{۱ + ی/ر} \right\} = ۹۸۰۵۶ - ۰۰۲۶۴۴۴ \times جم ۲ ذ)$$

- سطر (۲ - ۳) { ... (۴)

ان ضابطوں میں جیسا کہ ہم نے اوپر دیکھا ہے م کی قیمت ہوا کے آبی بخار کی مقدار پر منحصر ہوتی ہے لیکن اگر ہوا کو خشک فرض کیا جائے تو ضابطہ ہوگا
و = م ٹ (۱ + عت) اب اگر ہوا: سنتی گریڈ پیش پر ہو اور اس کا دباؤ ۷۶۰ ملی میٹر پارہ کے مساوی ہو تو م ٹ = ۷۶۰ ج ٹ،

جہان نہ پارہ کی کثافت ہے۔

اور $\frac{1}{\rho} = 1.042$ لینے سے

$$\rho = 1.042 \times 490 = 512.18 \text{ ج ملی میٹر}$$

$$= 495.12 \text{ ج میٹر}$$

اس سے $\rho = 980.56$ میٹر ہو جائے گا۔ لیکن اس میں

آبی بخار کو بالکل نظر انداز کر دیا گیا۔ ہے اور ρ کی ایسی قیمت جو مشاہدہ کردہ حقایق کے زیادہ مطابق نتیجہ پیدا کرتی ہے 963.52 ج ہے جس سے حاصل ہوگا

$$\frac{\rho}{980.56} = 1.8336 \text{ میٹر}$$

ضابطہ (۲) سے ρ معلوم کر کے کیلئے اول اس کی تقریبی قیمت مساوات

کے بائیں جانب میں $\frac{1}{\rho}$ کو نظر انداز کر کے معلوم کرنی چاہیے۔ پھر اگر اس تقریبی

قیمت کو اس مساوات کے بائیں جانب میں استعمال کیا جائے تو ρ کی زیادہ صحیح قیمت حاصل ہوگی۔ اس عمل کو منہ ظہور ت پھر دہرایا جاسکتا ہے۔

۱۲۔ دوسری تصحیحات بھی ضروری ہیں جب کہ عملی طور پر باریمائے ذریعہ ارتعاعوں کا ٹھیک ٹھیک معلوم کرنا مطلوب ہو۔ مثلاً ρ کی قیمت اس وجہ سے بھی بدلتی ہے کہ دی وئی تپش اور دباؤ پر آبی بخار کی کثافت خشک ہوا کی کثافت سے جو انہی حالات کے زیر اثر ہو کم ہوا کرتی ہے اور آبی بخار کا تناسب خشک ہوا کے ساتھ دو مقامات پر مختلف ہو سکتا ہے۔ (۱۳)

اور بالعموم مختلف ہوتا ہے۔

علاوہ بریں اگر اوپر والا مقام زمین کی سطح مرتفع کے کسی حصہ پر ہو تو زمین کے اس حصہ کی کشش کو بھی محسوب کرنا چاہیے جو اس کی اوسط سطح کے اوپر ہے۔ اس کشش کا اثر یہ ہوگا کہ مقدار $\frac{1}{\rho} (1 + \frac{r}{R})$ میں $\frac{1}{\rho}$ قدر

۳ ج ی / م ر کے اضافہ ہو جائے گا اس طرح ی ارتفاع پر جاذبہ کی قوت
کناپ

$$\frac{3 \text{ ج ی}}{م} + \frac{ج^2}{2(م+ج)}$$

ہوگا۔ (Routh, Analytical Statics II P 12) یا تقریباً ج $\{1 - \frac{5 \text{ ی}}{م}\}$

اس صورت میں د کے لئے مساوات حاصل ہوگی

$$\text{فرد} = ج - \{1 - \frac{5 \text{ ی}}{م}\} \text{ ف حری}$$

اور اس لئے اگر نیچلا مقام سطح بحر پر ہو تو

$$م (1 + عت) \text{ لوک } \frac{د}{ج} = ج ی (1 - \frac{5 \text{ ی}}{م})$$

$$\text{یا } ی = \frac{م (1 + عت) \left(1 + \frac{5 \text{ ی}}{م}\right)}{\frac{د}{ج} \text{ لوک } \frac{د}{ج}}$$

دفعہ (۱۲۵) کی مساوات (۲) کی بجائے ہیں مساوات

$$\frac{د}{ج} = \left(1 + \frac{5 \text{ ی}}{م}\right) \left(1 - \frac{1 - ط ی}{1 - ط ی}\right)$$

حاصل ہوگی۔ اور ی کے حاصل کرنے کے لئے آخری مساوات دفعہ (۱۲۶)

کی مساوات (۲) میں $1 + \frac{5 \text{ ی}}{م}$ کی بجائے $1 + \frac{5 \text{ ی}}{م}$ درج کرنے سے

حاصل ہوگی۔ یہ معلوم رہے کہ لوک $\left(1 + \frac{5 \text{ ی}}{م}\right)$ تقریباً ۲ لوک $\left(1 + \frac{5 \text{ ی}}{م}\right)$ کے مساوی ہے۔

یہ قابل توجہ ہے کہ اگر ی اور ر کو میٹروں میں نایا جائے تو $\frac{ج}{م}$

$$= ۱۵۰ \dots \dots \dots ۵ \text{ ی تقریباً}$$

اس طرح بحال کو نظر انداز کرنے سے جو غلطی واقع ہوگی وہ عام طور پر چھوٹی ہوگی۔
 خیال کیا جاتا ہے کہ اس قسم کا ضابطہ سب سے پہلے لاپلاس نے بیان کیا ہے۔
 ۱۲۸ — یہ بھی معلوم رہے کہ بار پیمائے کے اندر کے پارہ کی تپش کو ہم نے وہی
 مانا ہے جو اس کے گرد کی ہوا کی ہے۔ لیکن بعض صورتوں میں مثلاً جبکہ ہوائی جہاز
 میں مسابحات لئے جائیں تو یہ ممکن ہے کہ بار پیمائے ہی مقام پر اتنے عرصہ
 تک نہ رہے کہ اس کی تپش اس کے گرد کی ہوائی تپش کے مساوی ہو جائے
 پارہ کی تپش بہر حال تپش پیمائے کے ذریعہ دریافت ہو سکتی ہے جب اس کے جوہر کو
 بار پیمائے کے حوض میں رکھا جائے۔ اس طرح سے پارہ کی جو تپشیں حاصل ہو گئی انکو
 دفعہ (۱۲۵) کی مسادات (۲) میں استعمال کرنا ہوگا۔

(۱۳۱)

۱۲۸-۱- حملی توازن — متبادل مفروضہ تپش کے حملی توازن کا ہے۔
 لارڈ کیلون نے اس کو اس طرح بیان کیا ہے ”جب سیال کے تمام حصے آپس میں
 آزادانہ تبادلہ کرتے ہوں اور اشتعال دایہ سال کا آخر قابل قدر نہ ہو تو ہم کہتے ہیں
 کہ سیال کی تپش حملی توازن کی حالت میں ہے“ اس حالت میں یہ بات مستنبط
 ہوتی ہے کہ اگر مختلف ہموار سطحوں پر کی ہوا کی مساوی کمیتوں کو حرارت کے کسب

لے Mecanique Celeste, Livre X, Ch IV — لاپلاس کا ضابطہ حودفعہ (۱۲۶)

کے ضابطہ (۲) میں صرف عددی سرود میں استناد رکھتا ہے اس موضوع کے متعلق اساسی ضابطہ
 قرار دیا جاتا ہے۔ سر جان مور کی کتاب Meteorology, 1910

کے صفحہ ۱۴۹ میں اسکو درج کیا گیا ہے بار پیمائے تصحیحات کے استقامی ضابطہ کے لئے
 طبیعیات کی کسی جدید کتاب کا مطالعہ کرو مثلاً (Chwolson) کی کتاب

(Lehrbuch der Physik, 1902) جلد ۳ صفحہ ۳۴۳ اور جلد اول عددی

کے لئے دیکھو (Observer's Handbook) (حسکو) Meteorological

Office ۱۹۰۸ میں شائع کیا۔

collected papers V. III P. 255

یا زبان کے بغیر آپس میں تبدیل کرویا جائے تو وہ صرف دباؤ کثافت اور تپش کا تبادلہ کریں گے اور بحقیقت مجموعی کوئی تبدیلی نہ ہوگی۔ اس لئے اس صورت میں مذکورہ بالا مساواتیں ہو جائیں گی

$$\text{فرد} = - \text{ج} \text{ ث فری} \quad (۱)$$

$$\text{جہاں} \quad \text{د} = \text{م ت ج} \text{ اور } \text{د} = \text{ل ث ت}$$

یہ ارتفاع پر مطلق تپش کو بتا دیتا ہے۔

$$\text{م ج ث ج} = \text{فری} = - \text{ج فری}$$

$$\text{اور مکمل سے} \quad \frac{\text{م ج ث ج}}{\text{جہ} - ۱} = \text{ث ج} - ۱ = \text{م ج ی}$$

$$\text{جہ} - ۱ = \frac{\text{م ج ی}}{\text{ث ج} - ۱} = \text{م ج ی}$$

$$\text{جہ} - ۱ = \frac{\text{ل (ت) - (ت) - ۱}}{\text{ج ی}}$$

جہاں سطح بحر پر مطلق تپش کو بتا دیتا ہے۔

$$\text{ث ج} = ۱ - \frac{\text{جہ} - ۱}{\text{ل ت ج ی}} \times \frac{\text{ج ی}}{\text{ل ت ج ی}}$$

اور اگر متجانس کرہ کا ارتفاع h ہو تو

$$\text{ل ث ت ج} = \text{ج} = \text{ج ث ج}$$

$$\text{ث ج} = ۱ - \frac{\text{جہ} - ۱}{\text{جہ} - ۱} \times \frac{\text{ج ی}}{\text{ل ت ج ی}} \quad (۲)$$

اگر مساوات (۱) میں ج کی بجائے $\text{ج} / (ر + ی)$ رکھا جائے تو گردشہ کی طرح تکمل اور اندراج سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{ث ج} = ۱ - \frac{\text{جہ} - ۱}{\text{جہ} - ۱} \times \frac{\text{ری}}{\text{ل ت ج ی}} \quad (۳)$$

(۱۲۲)

۱۲۹ — ذیل کی دو مثالوں سے باب ہذا کے اصولوں کی توضیح ہوتی ہے۔
 (۱) ایک بے وزن فشارہ ایک انتصابی اسطوانہ میں ٹھیک بیٹھتا ہے۔ اسطوانہ کا قاعدہ بند ہے اور اس میں ہوا بھری ہوئی ہے۔ فشارہ ابتداً اسطوانہ کی چوٹی یا سرے پر ہے۔ اگر فشارہ کے سرے پر آہستہ آہستہ پانی ڈالا جائے تو معلوم کرو کہ باہر بہہ جانے کے پیشتر کتنا پانی ڈالا جاسکتا ہے فرض کرو کہ اسطوانہ کا ارتفاع h ہے اور فشارہ جس گہرائی تک نیچے جاتا ہے وہ y ہے۔ تب توازن کے محل میں اسطوانہ کی اندرونی ہوا کا دباؤ $\pi + \rho g y$ ہوگا۔ جہاں کہ ہوائی کا دباؤ π اور پانی کی کثافت ρ ہے۔ لیکن، یہ دباؤ $\pi = \rho h$ ہے۔

$$\pi + \rho g y = \rho h$$

فرض کرو کہ آبی بار پیماس کا ارتفاع g ہے۔

$$\text{تو } \pi = \rho g$$

$$g = h - y \quad (\rho = \rho)$$

اور $y = 0$ یا $g = h$

اس لئے جب تک کہ اسطوانہ کا ارتفاع g سے بڑا نہ ہو پانی داخل نہیں کیا جاسکتا۔ کیونکہ بالفرض اگر فشارہ کو نیچے دبا کر بھی اس پر پانی ڈالا جائے تو نیچے کی ہوا کا دباؤ فشارہ کو اٹھا دیگا۔

منفی حل کو، جبکہ $h > g$ ، یوں خیال کیا جاسکتا ہے کہ یہ ایک مختلف سوال کا حل ہے جس سے یہی جہر ہی مساوات قائم ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ اسطوانہ فشارہ کے اوپر بڑھایا گیا ہے اور فشارہ کو ایک ایسی قوت سے قدری فاصلہ کے اوپر اٹھانا مقصود ہے جو اس پانی کے وزن کے مساوی ہے جو اس اسطوانہ میں y ارتفاع تک بھرا جاسکتا ہے۔

اس سے مساوات پیدا ہوتی ہے

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\pi - \text{ج ث ی}}{\pi}$$

ی = ج - گ - و

(۲) ایک غبارہ کی حرکت معلوم کرنا مطلوب ہے یہ فرض کر کے کہ کسی محل میں اس کی ہٹائی ہوئی ہوا کی کیت متجانس ہے اور اثنائے حرکت میں تپش مستقل رہتی ہے۔

فرض کرو کہ غبارہ کی کیت کے مرکز کا ارتفاع ی اور اس کی کیت ک ہے۔ اس کا حجم ج اور ی ارتفاع پر ہوا کی کثافت ث ہے۔ تب وہ مساوات جس کے حرکت کا تعین ہوتا ہے یہ ہوگی

$$\text{ک} = \frac{\text{فری}}{\text{ث}} = \frac{\text{ج ث ی}}{\text{ث}} - \text{ک ج}$$

$$\text{ج} = \frac{\text{ر}}{\pi (1 + \text{ر})} \quad \text{جہاں}$$

لیکن مساوات فرد = ج ث فری اور د = م ث سے ہیں حاصل ہوگا

$$\frac{\text{ج فری}}{\pi (1 + \text{ر})} = \text{د}$$

اور اس لئے

$$\text{ک} = \frac{\text{فری}}{\text{ث}} = \frac{\pi \text{ ج ر}}{\pi (1 + \text{ر})} - \text{ک ج} = \frac{\text{ج ر}}{\pi (1 + \text{ر})} - \text{ک ج}$$

(۱۳۲) جس میں ک = ث ح رکھنے سے اور ۲ فری سے ضرب دیکر تکمیل کرنے سے

$$\text{ث} = \left(\frac{\text{فری}}{\text{ث}} \right) = \text{ب} - \frac{\pi \text{ ج ر}}{\pi (1 + \text{ر})} + \frac{\text{ج ر}}{\pi (1 + \text{ر})}$$

ابتدائی شرط سے ۰ = ب - ۲ - ۲ - ۲ ج

$$\therefore \text{ث} = \left(\frac{\text{فری}}{\text{ث}} \right) = \frac{\pi \text{ ج ر}}{\pi (1 + \text{ر})} - ۱ - \frac{\text{ج ر}}{\pi (1 + \text{ر})}$$

غبار کا زیادہ سے زیادہ ارتقاع

فرمی

قزق

رکھنے سے حاصل ہوگا۔ اور اگر غبارہ کی اوسط کثافت اور ہوا کی اوسط کثافت میں بہت بھڑا فرق ہو تو $\frac{1}{2}$ چھوٹا ہوگا اور ایک تقریبی قیاس معلوم کیا جاسکتی ہے

امثلہ

(۱)۔ اگر ہوا کی کثافت اضافی ۱۳.۵ اور بارہ کی ۹.۵ ہو اور اگر بارہ کا ارتقاع ۳۰ اینچ ہو تو ثابت کرو کہ مستقل خم کی قیمت تقریباً ۸۳۶۳۰۰ ہوگی بلکہ طول اور وقت کی اکائیاں فٹ اور ثانیہ ہیں۔

(۲)۔ ۵.۵ سنی گریڈ پر خشک ہوا کے ایک لٹر کا وزن ۱.۲۳ گرام ہے جبکہ بارہ کا ارتقاع ۶۰ ملی میٹر ہے۔ اس تپش پر آبی بخار کا دباؤ بارہ کے ۱۲.۵ ملی میٹر ستون کے مساوی ہے اور اس کی کثافت کو اسی تپش اور دباؤ پر کی خشک ہوا کی کثافت کے ساتھ وہی نسبت ہے جو ۵ کو ۸ کے ساتھ ہے۔ ایک لینر ہوا کا وزن معلوم کرو جب اس کو مذکورہ بالا تپش اور دباؤ پر آبی بخار سے سیر شدہ کر دیا جائے۔

(۳)۔ ایک ناقص بارہ پیمائے کے ارتقاع ۲۹.۲ اور ۲۰ اینچ ہیں جبکہ صحیح اکہ کے ارتقاع ۲۹.۴ اور ۳۰.۵ ہوتے ہیں۔ ناقص بارہ پیمائی کی ۵۰ طول معلوم کرو جس کو اس کے اندر کی ہوا ۳۰ اینچ دباؤ کے زیر اثر برقرار کر دے گی۔

(۴)۔ کرہ ہوائی کی ایک کعب گڑھ ہوا کو ایک ظرف میں جبکہ حجم ایک کعب فٹ ہے پچکا یا گیا ہے۔ بارہ پیمائے کے ارتقاع ۳۰ ہے۔ جمع شدہ توانائی کا عددی نایب تقریباً معلوم کرو جبکہ بارہ کی کثافت اضافی بلحاظ پانی کے ۹۶.۵۱۳ ہے اور پانی کے ایک کعب اینچ کا وزن ۷.۷۲۵ گریں ہے۔

(۵)۔ ایک بالکل صحیح سیانی بارہ پیمائے کے ارتقاع ۷ اور ۷ ہیں جبکہ

ایک ناقص بار پیا کے متناظر ارتفاع جس میں کچھ ہوا ہے اور ب ہیں —
ثابت کرو کہ اگر ناقص بار پیا کا ارتفاع ج ہو تو

$$(ع - و) (ب - و) (ب - ب)$$

$$(و - ج) (ع - و) - (ب - ج) (ج - ب)$$

کی صحت درکار ہوگی۔

(۶) — اگر تپش پیا کو ایک مانع میں جس کی تپش معلوم کرنا مطلوب ہے
جزء ڈو دیا جائے اور اس سے تپش کا اظہار ہو جبکہ ہوا کی تپش تہ ہو اور
تپش پیا کا غیر عرق شدہ حصہ م درجے ہو تو ثابت کرو کہ

$$م (ت - تہ)$$

$$۶۸۴ + تہ - م$$

کی صحت درکار ہوگی اگر تپش پیا کے اندرونی پارہ کا پھیلاؤ حرارت کے ا کے
لئے ہو۔ فرض کر لیا گیا ہے کہ ہر حصہ میں پارہ کی تپش اس حصہ کو
گھیرنے والی شے کی تپش کے مساوی ہے۔

(۷) ایک بند انتہابی اسطوانہ کے اندر جبکی تراش کا رقبہ ایک ہے و درں کا
ایک فشار ہے۔ بعداً فشار اسطوانہ کے وسط میں ہے اور اس کے نیچے اور
اوپر کی فضا سیر شدہ ہوا سے بھری ہوئی ہے۔ اگر فشار کو اپنے حال پر چھوڑ دیا
جائے تو وہ ابتدائی ارتفاع کا نصف بنچے اتر جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ سیر شدہ
بخار کا تناؤ ۳ - ۴ ہوگا جہاں کرہ ہوائی کا دباؤ ۳ ہے۔ اس عمل کے
اجدا اور اختتام پر تپش مری فرض کر لی گئی ہے۔

(۸) انتہابی بار پیا کی نلی بنائی گئی ہے جس کے اوپر کا حصہ سرے پر
بند کر دیا گیا ہے۔ اس حصہ کی تراش کا رقبہ ۱ ہے۔ بار پیا کا درمیانی حصہ
ایک جوہ ہے جس کا حجم ب ہے۔ بار پیا کے پچھلے حصہ کی تراش کا رقبہ
ج ہے اور اس کا پیندا کھلا ہوا ہے۔ جوہ تو یارہ سے بھرا ہوا ہے لیکن
نلی کے پچھلے اور اوپر کے حصوں میں پارہ جزو بھرا ہوا ہے۔ یارہ کو نیچے
سے باہر نکل پڑنے سے ایک چلتی کے ذریعہ روکا گیا ہے جو آزادانہ نیچے

(۱۳۴)

اوپر حرکت کر سکتی ہے اور جس پر ہوا کا دباؤ عمل کر رہا ہے۔ نلی کے بالائی حصہ میں چلا ہے۔ سیلابی ستون کے پچھلے اور اوپر کے سروں کے محل میں تغیر معلوم کرو جبکہ کرہ ہوائی کے دباؤ میں دیا ہوا تغیر واقع ہو۔

اگر آلہ کے اندرونی کل پارہ کا حجم ۲ ج ۲ ہو جہاں بار پیا کا ارتفاع ۲ ہے تو یہ بھی ثابت کر دو کہ اوپر کی سطح پینل کے تغیر سے غیر متاثر رہے گی۔

(۹) ایک اسطوانی ظرف غواص پانی میں ڈوبا ہے یہاں تک کہ اس کے کچھ حصہ ح میں ہوا باقی رہتی ہے۔ اس محل میں ہوا کی کچھ مقدار اس میں داخل کی جاتی ہے جس کا حجم کرہ ہوائی کے دیراثر ۲ ح ہے۔ معلوم کر دو کہ غواص کو کتنی گہرائی تک اور نیچے ڈوبنا چاہیے کہ اس کے اندر کی کل ہوا کا حجم اتنا ہی ہو جائے جتنا کہ محل اول میں تھا۔

نیز اس کے لئے شرط دریافت کر دو کہ محل اول میں جب ہوا زور سے داخل کی جاتی ہے تو ہوا غواص کے نیچے سے پھکر پھکنے نہ پائے۔

(۱۰) ایک ظرف ایسی سطح کی شکل کا ہے جسکی تکوین مکانی کی ایک توس کو جو اس پر ختم ہو جاتی ہے اپنے محور کے گرد کھانے سے ہوئی ہے۔ اس ظرف کو نیچے دار منہ کے ساتھ پارہ کے ایک برتن میں ڈوبایا گیا ہے۔ ثابت کر دو کہ ظرف کے اندر کی ہوا کا دباؤ اس فاصلے کے مربع کے تناسب معکوس میں ہوگا جو ظرف کے راس اور اندرونی پارہ کی سطح کے درمیان ہے۔ نیز یہ فرض کر کے کہ ظرف کے محور کے طول کو بار پیا کے ارتفاع کے ساتھ وہی نسبت ہے جو ۴۵ کو ۶۴ کے ساتھ ہے ظرف کے اندرونی پارہ کی سطح کی گہرائی معلوم کر دو جبکہ ظرف عین پوری طرح غرق ہو۔

(۱۱) ایک بے وزن فشارہ ایک انقباضی اسطوانہ میں ٹھیک بیٹھا ہے۔ اسطوانہ کا قاعدہ بند ہے اور اس میں ہوا بھری ہوئی ہے۔ ابتداً فشارہ اسطوانہ کے سرے پر ہے۔ اگر باقی فشارہ کے سرے پر آہستہ آہستہ ڈالا جائے تو ثابت کر دو کہ پانی کی اوپر کی سطح زیر ترین ہوگی جب کہ پانی کی گہرائی ۴ (ف) ہو۔ ف ہو جہاں آبی بار پیا کا ارتفاع ف ہے اور اسطوانہ کا ارتفاع ۱۔

(۱۲) باریہا کا ارتفاع ۸۸، ۲۹، ۱۰۰ ہے اور تیش بہا نقطہ شبنم پر ہے۔ باریہا اور پانی کے ایک پیالہ کو قابض میں رکھ دیا گیا ہے جس سے ہوا خارج کر دی گئی ہے۔ اب باریہا کا ارتفاع ۳۶، ۵۰، ۱۰۰ ہو جاتا ہے۔ کرہ ہوائی کی ہوا کا دیا ہوا حجم جتنی جگہ گھیرتا ہے اُس کو معلوم کرو اگر اس سے اس کے دباؤ اور تیش کی تبدیلی کے بغیر اس کا بخار خارج کر دیا جائے۔

(۱۳) ایک سیجی نلی ایک سرے پر دوسرے پر کھلی، ایک محور کے گرد جو اس کو زاویہ قائمہ پر ملتا ہے مستقل زاویہ رفتار سے گھوم رہی ہے۔ جاذبہ ارض کے عمل کو نظر انداز کر کے نلی کے اندرونی ہوا کی کثافت کسی نقطہ پر معلوم کرو۔ (۱۴) یکساں سوراخ کی ایک خمیدہ نلی کے دباؤ ایک دوسرے کے علی الصواب ہیں۔ یہ نلی اپنے انتصابی بازو کے گرد جس کا سر پانی میں غرق ہے مستقل زاویہ رفتار سے گھوم رہی ہے۔ ثابت کرو کہ انتصابی بازو میں جس ارتفاع تک پانی چڑھیکا وہ ہوگا

$$\left(1 - \frac{2}{3} \right) \frac{\pi}{2}$$

جہاں افقی بازو کا طول ۱، کرہ ہوائی کا دباؤ ۳، پانی کی کثافت ۴ ہے اور ۵ وہ نسبت ہے جو کرہ ہوائی کے دباؤ کو اس کی کثافت کے ساتھ ہے۔ (۱۵) نصف قطر کی یکساں تیلی دائری نلی جس میں ہوا ہے ایک محور کے گرد راوی رفتار سے گھوم رہی ہے یہ محور نلی کے مستوی میں واقع ہے اور اس کا فاصلہ نلی کے مرکز سے ج ہے ہوا کے وزن کو نظر انداز کر کے کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم کرو۔ اگر ج ۱ سے کم ہو اور اعظم اور اقل دباؤ د اور ۲ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right)$$

(۱۶) اگر دو مغارات کے باریہائی ارتفاعوں کے لوکار توں کے فرق کو ۱۰۰۰ سے ضرب دیا جائے تو ثابت کرو کہ اس سے نچینا وہ فرق حاصل ہوگا

جوان مقامات کے ارتفاعوں میں ہے جبکہ ان ارتفاعوں کو کنڈیہل (Cones) میں ناپا جائے۔

(۱۷) — ح اور ح حجم کے دو غیر موصل طرفت ہوا سے بھرے ہوئے ہیں، ان میں ہوا کے دباؤ دباؤ ہیں اور پٹنیں تھکے ہوئی ہیں، ان کیتوں کو ح حجم کے ایک غیر موصل برتن میں ملا دیا جائے تو آئینہ کا دباؤ معلوم کرو۔

(۱۸) — دو چونے جن میں ہوا ہے شیشے کی یکساں سوراخ دار افنی ملی سے ملا دئے گئے ہیں اور اس ملی کے اندر مانع کا ایک بلب، ہوا کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے جو فوں کو علی الترتیب ت درجے اور ت درجے تک گرا کر بلب کے مقام میں ہٹاؤ پیدا کیا گیا ہے اگر ہر چونے کی قیش کو بقدر ت درجے کے گھٹا دیا جائے تو ثابت کرو کہ بلب میں مزید ہٹاؤ پیدا ہوگا جو ابستائی ہٹاؤ کے ساتھ

۲ ع ت : ۲ + ع (ت + ت - ۲ ت)

کی نسبت رکھیں جہاں پھیلاؤ کی مندرجہ ہے۔

(۱۹) — ایک لچکدار کردی لفافہ کے گرد ہوا ہے جو بخار سے سرشار ہے۔ اگر اس کی اندرونی ہوا کا دباؤ کرہ ہوائی کے دباؤ کا دو چہد ہوتا تو اس کا نصف قطر اپنے اصلی نصف قطر کا دو چہد ہو جاتا اور اگر اس کے اندر کرہ ہوائی کے دباؤ پر جتنی ہوا سا سکتی ہے اس کے علاوہ گنا ہوا ہوتی تو اس کا نصف قطر اپنے اصلی نصف قطر کا سہ چہد ہو جاتا۔ یہ فرض کر کے کہ کسی نقطہ پر کا تناؤ ایسے بدلتا ہے جیسے سطح کا پھیلاؤ ثابت کر دو کہ ہوا کے دباؤ کا $\frac{1}{3}$ حصہ بخار کے دباؤ کی وجہ سے ہے جو اس میں شامل ہے۔

(۲۰) — ایک محزوطی خول کا زاویہ راس $\frac{\pi}{3}$ اور ارتفاع ف ہے اس میں اس کے وزن کا دو چہد پانی سا سکتا ہے اس کو اونڈھا کر کے (یعنی جبکہ راس اوپر کی طرف ہو) انتصابی محور کے ساتھ پانی میں ڈبوایا گیا ہے اور پھر پانی کو زاویہ راس $\frac{\pi}{3}$ (ج ۳/۲) سے گھمایا گیا ہے۔ گھمانے کی

رج سے مخروط پانی میں اس قدر ڈوب جاتا ہے کہ اس کا اس پانی کی سطح میں ہوتا ہے۔ ثابت کر دو کہ آبی بار پیمائے کے ارتفاع کو مخروط کے ارتفاع سے وہی نسبت ہے جو $\frac{3}{2}$ کے سے ہے۔

(۲۱) ایک چھوٹے غبارہ میں ہوا ہے اور اگر n سیسہ اس کے ساتھ بندھا ہوا ہے۔ اس کے غلاف کی وہی کثافت ہے جو پانی کی ہے۔ سیسہ سمیت اس کو پانی میں ڈبوایا گیا ہے۔ اگر پانی کی تپش اور کرہ ہوائی کے دباؤ پر غبارہ میں ایک کعب ایچ ہوا سا کعبے تو کتنی گہرائی تک اس کو ڈبوایا پڑے گا کہ یہ غیر قائم توازن کے محل میں آجائے جبکہ آبی بار پیمائے کا ارتفاع 33 فٹ ہو اور یہ دیا گیا ہو کہ

ہوا کی کثافت : پانی کی کثافت : سیسہ کی کثافت = $1 : 800 : 9130$
(۲۲) ایک یکساں ٹھوس مکائی نما سے اس کا نصف حجم علیحدہ کر کے ایک پیالہ بٹن یا گیا ہے اس طور پر کہ اس کا اندرونی احاطہ ایک مساوی ہم محور مکائی نما ہے جس کا اس قبل الذکر مکائی نما کے ماسکے پر ہے۔ پیالہ سیال میں اوپر وار رہا ہے اور انتصابی محور کے ساتھ ڈبوایا گیا ہے اور نیچے سے اتنی گیس خلا میں داخل کی گئی ہے کہ اس سیال کی سطح میں اُٹھ آتا ہے اب اگر پیالے کے اندرونی احاطہ کی نصف گہرائی تک پانی ہو تو ثابت کر دو کہ سیال کی کثافت مکانی نما کی کثافت کا چوتھ ہے۔

(۲۳) اگر ہوا کا دباؤ ایسے بدلے جیسے اس کی کثافت کی $(1 + \frac{1}{m})$ میں قوت تو تپش اور جاذبہ الارض کے تغیرات کو نظر انداز کر کے ثابت کر دو کہ کرہ ہوائی کی بلندی متجانس کرہ ہوائی کی بلندی کا $(m + 1)$ گنا ہوگی۔

(۲۴) وزن کا فشار ایک انتصابی اسطوانہ میں ساکن ہے۔ اسطوانہ کی عمودی تراش ک سے اور فشار ہوا کے ستون کی گہرائی h سے متساوی ہے۔ فشار کے ڈبڈبے پر ایک انتصابی دھمکتی پڑتا ہے جس سے فشار بہت قدر فاصلے کے نیچے چلا جاتا ہے۔ ثابت کر دو کہ

$$(د + \pi ک) (ف + و لوک (۱ - \frac{ت}{و}) + \frac{ج ق}{و} = ۰$$

جہاں کرہ ہوائی کا دباؤ π ہے۔

۲۵۔ ایک کرہ می غبارے کا نصف قطر رہے اور اس میں گیس کی کچھ مقدار ہے جسکی کثافت سطح زمین پر کے کرہ ہوائی کے دباؤ دبرہ ہے۔ اگر غبارہ متاؤ ف کو عین سنبھالنے کے قابل ہو تو ثابت کر دو کہ یہ پیٹ جائے گا اگر اس کی رفتار اتنی ہو جائے جتنی

$$\frac{و}{۲} = \frac{ت}{ر} + م لوک (۱ - \frac{ت}{د ر})$$

سے حاصل ہوتی ہے۔ جہاں غبارہ کی حرکت کی مزاحمت نظر انداز کر دی گئی ہے۔

۲۶۔ یہ فرض کر کے کہ کرہ ہوائی پوری فضا میں پھیلا ہوا ہے اور اس کی قبض ہر جگہ یکساں ہے ثابت کر دو کہ مریخ کی سطح پر کے کرہ ہوائی کی کثافت کو زمین کی سطح پر کے کرہ ہوائی کی کثافت کے ساتھ تقریباً ۵۶۹ کی نسبت ہوگی۔ یہ دیا گیا ہے کہ مریخ کی کثافت دہی ہے جو زمین کی ہے اور اس کا نصف قطر زمین کے نصف قطر کا نصف ہے اور زمین پر کرہ ہوائی کا دباؤ ۱۰۳۳ گرام فی مربع سمر ہے اور ہوا کے ایک مکعب سمکیت کا وزن ۱۲۴۰۰ گرام ہے۔ زمین کا نصف قطر ۶۳۶۹۸۰۰ میٹر ہے۔

۲۷۔ اگر بار بیما کی درجہ بندی کے بعد ہوا کا ایک خیف حجم ح پارہ کے اوپر کے خلا میں داخل کیا جائے اور قبض غیر متغیر رہے تو ثابت کر دو کہ کسی مشاہدہ شدہ ارتفاع ف کے لئے

$$\frac{ج}{م} \times \frac{ف}{(۱ - ن) (ف - ف)}$$

کی تصحیح کرنی پڑے گی۔ جہاں نلی کی تراش کا رقبہ $م$ ، برتن کی تراش کا رقبہ $ج$ اور ج اُس غلاہری خلا کا طول ہے جو ناقص بار بیما کے دوسرے مشاہدہ شدہ

ارتفاع ف کے جواب میں ہے۔
 ۲۸ — اگر کرہ ہوائی کی تپش بلندی کے ساتھ یکساں طور پر گھٹتی فرض کی جائے
 تو ثابت کرو کہ سطح بحر سے کسی مقام کا ارتفاع می

$$= \{ 1 - \left(\frac{f}{F} \right)^2 \}$$

جہاں اس مقام پر اور سطح بحر پر بار پیمائے کے ارتفاع بالترتیب ف، ف ہیں اور
 ۱، ۱ م مستقل ہیں۔

۲۹ — حملی توازن کی حالت میں ثابت کرو کہ کرہ ہوائی کی تپش اوپر وادریکساں
 شرح سے گھٹتی جائے گی۔ اس شرح کو سنٹی گریڈ کے درجوں میں فی ۱۰۰ میٹر معلوم
 کرو جبکہ حسب ذیل باتیں معلوم ہوں:-

$$\begin{aligned} \text{بار پیمائے کا ارتفاع} &= ۷۶۰ \\ \text{تپش (مطلق)} &= ۲۷۲ \text{ سنٹی گریڈ} \end{aligned}$$

$$\text{ہوا کی کثافت} = ۱.۲۹ \times ۱۰^{-۳}$$

$$\text{پارہ کی کثافت} = ۱۳.۶۰$$

$$\text{نوعی حرارتوں کی نسبت (جہ)} = ۱.۴۲$$

$$\text{(س-گ، ف نظام میں) -}$$

باب ششم لام سطحوں کا تناؤ

(۱۳۷)

۱۳۰۔ لام سطحوں (Flexible surfaces) کے توازن کے عام مسئلہ پر لگراج نے (Mecanique Analytique Tom I) میں اور نیز زیادہ تفصیل سے پائسن نے (Memoires de l'Institut, 1812) میں بحث کی ہے۔ ہم اس باب میں خاص قسم کے سوالات پر غور کریں گے جو عام صورت سے پیدا ہوتے ہیں یعنی ایسے سوالات پر جو لام سطحوں پر سیالات کے عمل سے متعلق ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ سیال کا دباؤ کسی سطح پر جو سیال کے ساتھ تماس رکھتی ہو اس سطح کی عمادی سمت میں عمل کرتا ہے اس لئے فی الحقیقت ہمیں ایسی لام سطحوں کے توازن پر غور کرنا ہوگا جو عمادی دباؤں اور ان کو محدود کرنے والے خطوط پر کے تناؤں کے زیر عمل ساکن ہوں۔

عمومیت کی خاطر اصطلاح 'لام سطح' ایسی چیزوں کو تعبیر کرتی ہے جیسے کپڑا اور پتلا کاغذ جن کو موڑنے میں کوئی قابل متدرج زحمت محسوس نہیں ہوتی اور جو موڑنے یا موڑنے کے بعد اپنی ابتدائی شکل پر لوٹنے کا میلان نہیں رکھتیں۔ کامل طور پر لام سطحوں کو خواہ وہ امتداد پذیر (Extensible) ہوں یا امتداد ناپذیر بے شک خیال کیا جائے گا۔

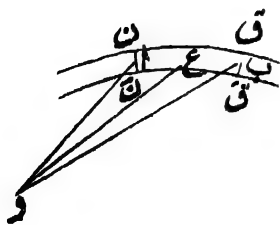
دفعات ذیل میں ہم یہ فرض کریں گے کہ لام سطح کے کسی دو حصوں کے درمیان جو زور عمل کرتا ہے اس کی سمت سطح کے بالکلہ تماس ہے۔

تناؤ کا ناپ

ایک ملائم اور بے لچک سطح پر عوز کرو جو تناؤ کی حالت میں رہے خواہ یہ سطح استداد پذیر ہو یا امتداد ناپ پذیر اور فرض کرو کہ نقطہ ن میں سے گزرنے والے کسی نادیمستی سے جو تراش حاصل ہوتی ہے اس کی ایک چھوٹی ٹوس ق ن ق ہے۔ اب اگر خط ق ق سے محدود ہونے والی سطح کے حصوں کے درمیان حاصل عمل ت ق ق ہو جو ماسی مستوی میں ق ق پر عمود ہے تو نقطہ ن پر کے تناؤ کا ناپ ت ہوگا۔ یہ الفاظ دیگر نقطہ ن پر کے تناؤ کی شرح ت سے یا وہ قوت جو اس شے کی ایسی تراش پر عمل کرے گی جس کا طول کافی ہے اور جو ہر جگہ ایسی حالت تناؤ میں ہے جیسی کہ ن پر کی سطح۔

عام طور پر سطح کے ان حصوں کے درمیان جن کو ق ق علیحدہ کرتا ہے جو زور عمل کرے گا وہ ق ق کے عمود وار نہیں ہوگا اور اس لئے وہ تناؤ ت ق ق اور قوت ت ق ق کا حاصل ہوگا جہاں قوت ت ق ق مخنی ق ق کے ماس کی سمت میں عمل کرتی ہے اور تہ اسی قسم کی ایک مقدار ہے جیسی کہ ت ہے اور اس کی پیمائش بھی اسی طرح ہوتی ہے۔

۱۳۱۔ ایک ظرف قائم مستطی اسطوانے کی شکل کا ہے جس کی مخنی سطح ملائم اور جس کا محور انحصاری ہے۔ اس ظرف میں سیال ہے۔ کسی نقطہ پر کے تناؤ اور دباؤ کے درمیان ربط معلوم کرنا مطلوب ہے۔



فرض کرو کہ سطح کا ایک چھوٹا حصہ ن ق ہے جو دو مستویوں کے درمیان جو عمود وار ہیں اور اسطوانے کے دو کونوں کے درمیان محدود ہے۔

فرض کرو کہ ن ق کے کسی نقطہ پر افقی تناؤ ت اور دباؤ د ہے۔ تب سطح کا عنصر ن ق ذیل کی قوتوں کے

زیر عمل متوازن ہوگا۔۔۔ حمادی دباؤ \times ن \times ن ق ، ماسی قوتیں
ت \times ن \times ت اور ت \times ق ، اور ن ق اور ن ق پر کے انتصابی تناؤ
اگر انتصابی سمت میں کوئی تناؤ عمل کریں۔
پس قوتوں کو عماد و ع کی سمتیں تحلیل کرنے سے جو نقطہ وسطی ع تک
مکینچا گیا ہے

$$(\times \text{ ن } \times \text{ ن } \times \text{ ق} = 2 \times \text{ ن } \times \text{ ن } \text{ جب } (\frac{1}{2} \text{ ن } \times \text{ ق}))$$

$$= 2 \times \text{ ن } \times \text{ ن } \times \text{ ق} = 1 \times \text{ ن } \times \text{ ق} ، \text{ اگر نصف قطر ہو}$$

یا ت = در
۱۳۲۔ اگر کسی شکل کی اسطوانی ملائم سطح میں سیال ساخن ہو تو اسطوانے کے
محور کے علی القواہم تراش کے کسی نقطہ پر کا تناؤ ہی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ سطح کا ایک عنصر ن ق ہے (شکل ذہ ۱۳۱) فرض کرو کہ ا
پر کا مرکز انحنا و ا پر کا تناؤ ت ، کب پر کات + مفع + اور نقاط ا اور
ب پر کے ماسوں کا درمیانی زاویہ مفع ذہ ہے۔

نیز فرض کرو کہ ن ق قیر کے سیالی دباؤ کی سمت کا میلان و ا کے ساتھ
مفع سا ہے جسکو و ا ، و ب کے درمیان واقع ہونا چاہیئے۔
تب ا پر کے ماس کی سمت میں قوتوں کو تحلیل کرنے سے

$$(ت + مفع ت) \text{ جم ذہ } = و \times ا ب \text{ جب مفع سا}$$

$$= و مفع ذہ \text{ جب مفع سا}$$

اگر ا پر کا نصف قطر انحنا رہو۔

پس بالآخر جب کہ مفع ذہ معدوم ہو جائے

$$\frac{و}{\text{فرقہ}} = 0$$

اور چونکہ تراش کے ہر نقطہ پر یہ بات صادق آتی ہے اس لئے نتیجہ نکلتا ہے کہ ت

مستقل ہے۔

سمت و ع میں قوتوں کو تحلیل کرنے سے گزشتہ دفعہ کی طرح ربط

(۱۲۹)

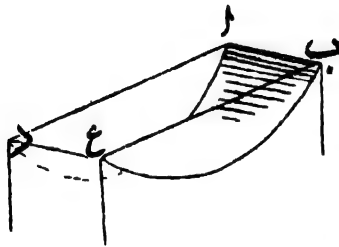
حاصل ہوگا جو سطح کے کسی نقطہ پر کون کے علی التوایم تناؤ، دباؤ اور انحناء کے درمیان ربط ہے۔

ت کو مستقل لینے سے مساوات در = ت سے کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم ہو جائیگا اگر سطح دی ہوئی ہو۔

اگر سیال پر عمل کرنے والی قوتیں دی ہوئی ہوں اور اس لئے د، سیال کے اندر کسی نقطہ کے محدود کا معلومہ تفاعل ہو تو ایسی مساوات سے مائع سطح کی اختیار کردہ شکل کا تعین ہو جاتا ہے۔

ثوبیہ اور لدنیہ

۱۳۳— ثوبیہ (Lintearia) وہ سختی ہے جو مہین کپڑے کے ایک مستقل ٹکڑے پر پانی ڈالنے سے پیدا ہوتا ہے جبکہ اس کے سرے افقی طور پر تھامے گئے ہوں اور پانی بانڈوں پر سے نکلنے نہ پائے۔



اس طرح اگر کپڑے یا جہلی کے کنارے ا، ب، ع، د ایک صندوق کے کناروں پر مثبت کر دئے جائیں اور اگر اضلاع ا، د، ب، ع صندوق پر ٹھیک بیٹھتے ہوں اور کپڑے پر پانی ڈال دیا جائے اور پھر ا، د یا ب، ع کے متوازی، ایک انتہائی مستوی

سے کپڑے کو تراشا جائے تو یہ عمودی تراش ثوبیہ ہوگی۔

دباؤ جو کچھ عماد کی سمت میں عمل کرتا ہے اس لئے کپڑے کا تناؤ مستقل ہے اور اس لئے اگر نقطہ ن پر کا نصف قطر انحناء ہو اور ب، ع پانی کی سطح ہو

(دوسری شکل دیکھو) تو

ج ن ل × ر مستقل ہے۔

تینا کو ج ن م سے تعبیر کرنے سے اور ن م = م لینے سے ہمیں حاصل ہوگا۔

$$\frac{م}{ر} = \frac{ن}{ل} = ن - م$$

پس

$$\frac{م}{ر} = \frac{فر}{فرز} = \frac{فر}{رجب} = فر$$

اور $\frac{م}{ر} = \frac{م}{رجب} = ج - م$ اگر ب کے انصاف عد ہو،

$$\frac{م}{رجب} = \frac{فر}{فرز} = فر$$

جو توبہ کی ذاتی مساوات ہے۔

(۱۴۰)

اب اس میں جب $\frac{م}{ر} = ک$ ، اور جب $\frac{فر}{ر} = ک$ جن ۶

رکھنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{فر}{رجب} = فر$$

$$\frac{م}{رجب} = \frac{م}{رجب} = ک$$

جن ۶ = Sn u

صن ۶ = Cn u

طن ۶ = Dn u

لے ترقیم :-

= م فرء

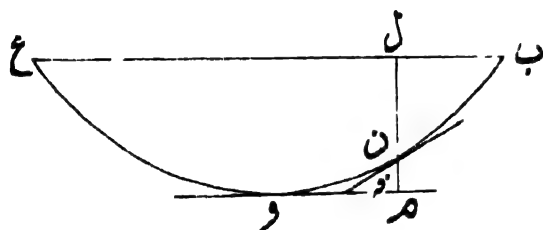
یا اگر ہم S کو زیر ترین نقطہ سے ناپیں تو

تب گہرائی ن ل = ف - ا = م - م

$$= \text{م م} \overline{\text{ما}} \overline{\text{ما}} \text{جم فـ - جم ع}$$

$$= 2m \text{ ک ما } 1 - \text{جن } 2$$

یعنی ف = ۲ م ک ص ۶۰۰۰۰۰ (۲)



پہر اگر دم = لا

تو $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = \text{جم ذ} = ۱ - ۲ \text{ ک جن} ۶$

لا = م (۱-۲ ک جن باء) فرع

یعنی $1 = \{2 \text{ ق (خط ۶) - ۶\} \dots \dots (۳)$

جہاں ق ”دوسری قسم کا ناقصی تکملہ ہے۔“

کھڑی شرط یہ ہیں کہ لا، ما، اس سب کے سب معدوم ہو جاتے ہیں جبکہ ۶ =

E. (a.m u) = ق (ط ٤)

اور ان توبہ مساوات (۲) میں استعمال کرنے سے ہمیں $b = 2m$ کہ حاصل ہوتا ہے۔ یہ اگر $a = 1$ اور $s = 1$ جب کہ $a = 1$ ف تو ان مساوات (۲) میں مندرجہ کرنے سے $s = 2$ پس معلوم ہوا کہ e کی متناظر قیمت k ہے جو ناقصی تفاعل کا حقیقی ربعی دور ہے۔ اور اس لئے (۱) اور (۳) سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$l = m$$

$$1 = m \{ 2 \text{ (حک) } - k \}$$

اور

اس لئے توبہ مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) سے حاصل ہونا ہے بشرطیکہ مستقلوں کے درمیان وہ روابط ہوں جو ادیر بیان ہوئے۔
 ۳۴ — لدنیہ (Elastica) وہ مسخنی ہے جو ایک پندار ڈنڈے کو موڑنے سے پیدا ہوتا ہے یہ توبہ کے متماثل ہے۔

ڈنڈے کو b و c سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ توازن a b اور c پر کی قوتوں سے جو متضاد سمتوں میں عمل کرتی ہیں برقرار رہتا ہے۔

نقطہ n پر جھکاؤ کا معیار اثر (Bending moment) n کے متاسب ہے۔ اور اس لئے b n کے توازن پر غور کرنے سے اور نقطہ n کے گرد معیار لینے سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ نقطہ n پر کا انحنائیسے بدلتا ہے

۱۷ Roath, *Analytical Statics*, II p 269, or Kelvin and Tait *Natural Philosophy*, 591

۱۸ For a full discussion of the *Elastica* see Kelvin and Tait,

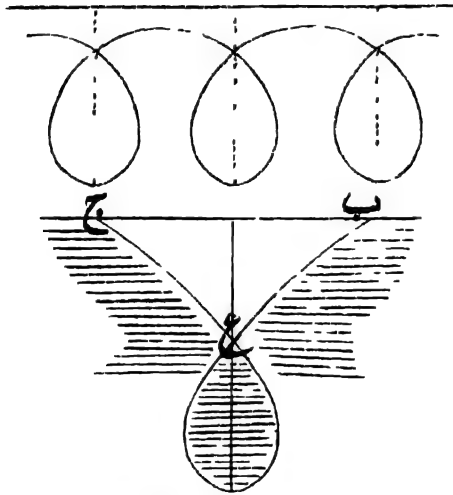
Natural Philosophy 611 Love, *The Mathematical Theory of Elasticity*, p 384, or L Levy, *Precis Elementaire de la Theorie des Fonctions Elliptiques*, p. 112

جیسے ن ل۔ اس طرح

$$ر \times ن ل = م^۲$$

اور اس لئے لدنیہ، توبیہ کے مماثل ہے۔

۱۳۵۔ لدنیہ لہیفون (convolutions) کی مختلف تعداد پر مشتمل ہو سکتا ہے جس طرح کہ اشکال ذیل سے ظاہر ہے



پانی کی سطح اور اس کے دباؤ کی مناسب ترتیب و تنظیم سے توبیہ کے بھی مختلف لہیفے ہو سکتے ہیں۔

مثلاً اگر ہم ب ج کو سطح آب تصور کریں اور اس طرح کے انتظامات عمل میں لائیں کہ پانی فضا و ع میں بھردیا جائے اور پانی ب ج ع ج ع حصوں کو اوپر وار دبائے تو ہمیں ایک لہیفے والے لدنیہ کے مماثل توبیہ مل جائیگا۔

اگر ہم یہ تصور کریں کہ ب ج، مڑے ہوئے ڈنڈے کو ب اور ج پر مس کرتا ہے جس کے لئے یہ ضروری ہوگا کہ ڈنڈا لامتناہی طول کا ہو اور اگر گزشتہ کی طرح وپر کے ماس سے انحراف ناپا جائے تو

(۱۴۲)

$$ر = \infty \quad \text{جبکہ} \quad د = ۲$$

$$\text{اور اس لئے } \frac{m}{2} = 1 + \text{جم ف، یا } \frac{f}{2} = \frac{m}{2} \text{ جم ۲}$$

اگر س کو دسے ناپیں تو

$$س = م لوک سس \left(\frac{f}{m} + \frac{m}{f} \right)$$

آئندہ معلوم ہوگا کہ یہ شعری منحنی ہے۔

۱۳۴ — ویرس ٹراس (Weirstrass) کے ناقصی تفاعیل کی رقوم میں بھی ہم تو بیہ کی مساواتیں حاصل کر سکتے ہیں۔ مثلاً دفعہ (۱۳۳) سے

$$\frac{\frac{f}{2}}{\frac{f}{2} \left(\frac{m}{f} + 1 \right)} = \frac{\frac{f}{2}}{\frac{f}{2} \left\{ 2 \left(\frac{f}{m} \right) + 1 \right\}} = \frac{1}{2} = \frac{m}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{2m - 1}{2} = 1 - \frac{1}{2m + 1} = 1 - \text{جم ف} \dots (۱)$$

$$\text{تاکہ } \frac{f}{2} = 1 - \frac{2m - 1}{2m^2}$$

$$\text{اور } \frac{f}{2} = \frac{2m^2 - 2m + 1}{(2m^2 - 2m + 1)(2m^2 - 2m + 1)}$$

$$\text{رکھو } 2m^2 - 2m + 1 = 2m^2 - 2m + 1 \text{ فری} = \text{فری}$$

$$\therefore \frac{f}{2} = \frac{2m^2 - 2m + 1}{(2m^2 - 2m + 1)(2m^2 - 2m + 1)}$$

۱۵ جیس برنولی پہلا شخص تھا جس نے نوبیہ کی مساوات دریافت کی۔

اور فرض کرو کہ $ی = و + \frac{1}{3} (۲م + ۲ف)$

$\frac{1}{3} (۲م - ۲ف) - و$

تو $\frac{\text{فری}}{\text{فری}} = \frac{\{۲م + و + \frac{1}{3}(۲م + ۲ف)\} \{۲م - و - \frac{1}{3}(۲م - ۲ف)\}}{\{۲م + و + \frac{1}{3}(۲م + ۲ف)\} \{۲م - و - \frac{1}{3}(۲م - ۲ف)\}}$

اب فرض کرو کہ $ع = \sqrt[۴]{\frac{\text{فری}}{(۲م - و - ع)(۲م - و - ع)(۲م - و - ع)(۲م - و - ع)}}$

جہاں $ع = \frac{1}{3} (۲م - ۲ف) - ع = \frac{1}{3} (۲م - ۲ف) - ع = \frac{1}{3} (۲م - ۲ف) - ع$

پس چونکہ (۱) سے $۲م = ۲ف$ جب $ع = ۲م > ۲م$

اس لئے $ع < ع < ع$

اس لئے $د = ۲ف (ع + ص)$ جہاں ص مستقل ہے

اب $۲م > ۲ف$ ، اس لئے $ی > ۲ف$

اور $\frac{1}{3} (۲م + ۲ف) > \frac{1}{3} (۲م - ۲ف) - و$

یعنی $ع > و > ع$

پس م کو حقیقی لینے سے، ص کا خیالی حصہ، خیالی نصف دور سم ہونا چاہیے اور اس کا حقیقی حصہ، ع کی زیرین حد کے مناسب انتخاب سے صفر لیا جاسکتا ہے۔

$د = ۲ف (ع + ص)$

اس طرح چونکہ $\frac{\text{فری}}{\text{فری}} = \frac{(۲م + و + \frac{1}{3} (۲م + ۲ف)) - (۲م - و - \frac{1}{3} (۲م - ۲ف))}{(۲م + و + \frac{1}{3} (۲م + ۲ف)) (۲م - و - \frac{1}{3} (۲م - ۲ف))}$

$\frac{1}{3} (۲م + ۲ف) - و = \frac{1}{3} (۲م + ۲ف) - و$

$$\text{اور } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \dots \quad (1)$$

جہاں $\frac{1}{2}$ دیرپہ سس کا زیتا فنکشن (Zeta Function) ہے اور مستقل ہے۔

$$\text{نیز جبکہ } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \dots \quad (2)$$

$$\text{اور چونکہ } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \dots \quad (3)$$

$$\text{نیز } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \dots \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \dots \quad (5)$$

اس طرح ابھی اندراجات سے

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \dots \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \dots \quad (7)$$

$$\text{پس } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \dots \quad (8)$$

بشرطیکہ سس کو وہی لکھا جائے جہاں $\frac{1}{2}$ حسب بالا صفر ہو جاتا ہے۔

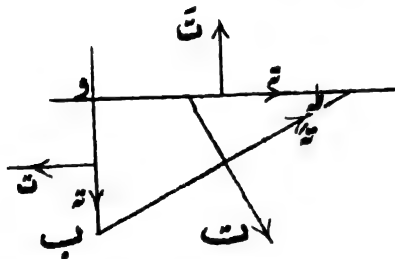
$$\text{اسی طرح اگر } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \dots \quad (9)$$

اس لئے فح (ع + سم) = ع ۲ ، پس ع کی متناظر قیمت سم ہونی چاہیے اور مستقلوں اور دوروں میں ردابط ذیل ہونگے

$$ل = طا (سم) - طا (سم) - \frac{1}{4} ع ۲ سم$$

ل = ۲۲ سم کے لئے مشکلیں کھینچی ہیں جس میں پانی ہوا سطح ب ج تک بھرا ہوا ہے۔ لیکن اگر پانی کی مقدار اس سے کم ہو تو کپڑے کے وہ حصے جن کو پانی میں نہیں کرتا مستوی ہونگے اور ف کی قیمت اس صورت میں سطح آب کے نیچے راس کی گہرائی ہوگی۔

۸ سم ا — تناؤ اور ماسی عمل — ایک مستوی ملائم جہلی کے توازن پر غور کرو۔ جہلی کے کسی خط پر کا زور یعنی سطح کے ان متصلہ حصوں کے درمیان عمل جو اس خط سے محدود ہیں عام طور پر اس خط کے ساتھ میلان رکھے گا اور اس لئے ایک تناؤ اور ایک ماسی عمل یہ سے تعبیر ہوگا۔ اب ہم یہ بتائیں گے کہ کسی دو سمتوں میں جو ایک دوسرے پر علی التوائٹم ہوں یہ کی قیمت دہی ہوتی ہے اور یہ کہ دو سمتیں ایسی بھی ہوتی ہیں جن کے لئے یہ صفر ہو جاتا ہے۔



سطح کا کوئی مربع عنصر لینے سے متقابل اضلاع کے ایک جوڑے پر کے ماسی اعمال تہ فرس اور (تہ + مف تہ) فرس انتہا میں جفت تہ مف ص ۲ بناتے ہیں اگر عنصر کا ایک ضلع مف میں ہو۔ اور چونکہ اس کی تبدیل دوسرے جفت تہ مف ص سے ہونی چاہیے اگر تہ علی التوائٹم سمت میں ماسی عمل

ہو اس لئے اس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ تہ اور تہ مساوی ہیں -
اب ایک چھوٹا مثلثی عنصر د ل ب ل و پر قائم الزاویہ ہے اور زوروں
کو شکل کے بموجب تعبیر کرو۔

(۱۴۵)

ب ل کے متوازی قوتوں کو تحلیل کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{تہ ل ب} + \text{تہ ل و} + \text{تہ ل ت} = \text{د ل جب ط} = \text{ت} \times \text{و ب جم ط} + \text{تہ} \times \text{و ب جب ط}$$

$$\therefore \text{تہ} = (\text{ت} - \text{تہ}) \text{ جب ط} = \text{تہ} - \text{تہ} \text{ جم ط}$$

تہ صفر ہوگا جب کہ

$$(\text{ت} - \text{تہ}) \text{ مس} = \text{تہ} = \text{تہ}$$

جس سے دو علی التواکم سمتیں حاصل ہوتی ہیں -

۱۴۹۔ اگر شکل میں ہم یہ ان لیں کہ و ا اور و ب صفر ماسی عمل کی سمتیں
ہیں اور اگر قوتوں کو ب ل کے متوازی اور اس کے علی التواکم سمتوں میں تحلیل
کیا جائے تو مساواتیں

$$\text{ت} = \text{ت} \text{ جب ط} + \text{تہ} \text{ جم ط}$$

$$\text{تہ} = (\text{ت} - \text{تہ}) \text{ جب ط} + \text{تہ} \text{ جم ط}$$

حاصل ہونگی۔

اس صورت میں مقادیر ت اور تہ بڑے سے بڑے اور چھوٹے
سے چھوٹے یا چھوٹے سے چھوٹے اور بڑے سے بڑے متناؤں کو تعبیر کریں گی اور
اس لئے ہم ان کو صدی متناؤ کہیں گے۔

۱۴۰۔ اگر ل ب پر کے حاصل زور م ر ل کا میلان د ل کے ساتھ نہ ہو تو

$$\text{مس فہ} = \frac{\text{تہ} \times \text{د ل}}{\text{ت} \times \text{و ب}} = \frac{\text{تہ}}{\text{ت}} \text{ مم ط}$$

$$\therefore \text{مس فہ مس ط} = \frac{\text{تہ}}{\text{ت}}$$

نیز $س \times ا = ت \times و + ب \times ت \times و$

$\therefore س = ت \times ب \times ط + ت \times جم \times ط$

اور ط کو ساقط کرنے سے ہمیں ربط ملیگا

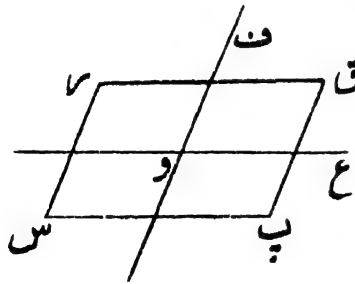
$$\frac{س}{ت} = \frac{ب \times ط}{ت} + \frac{جم \times ط}{ت}$$

اگر اب سمتوں و ا اور و ب میں نقطہ و کے صدر می تناؤت اور ت ہوں اور اگر و ع کا میلان و ا کے ساتھ ط ہو تو و ع پر کے زور کی سمت و ت مساوات

$$\frac{ت}{ت} = مس \times ط$$

سے حاصل ہوگی اور زور کی مقدار فی اکائی طویل سمت و ت میں اس ناقص کے نصف قط سے تعبیر ہوگی جس کے نصف محاور صدر می تناؤں سے تعبیر ہوتے ہیں۔

(۱۴۶) — مزدوج زور۔ اگر و ع کا زور و ت کی سمت میں عمل کرے تو و ت پر کا زور و ع کی سمت میں عمل کرے گا۔



کیونکہ اگر ہم ایک ایسے عنصر کے توازن پر غور کریں جو ایک متوازی الاضلاع پ ق س کی شکل کا ہو اور جس کے اضلاع و ع اور و ت کے متوازی ہوں تو پ س اور ق س پر کے زور متعادل ہیں اور اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے

کراپ فی اور سراسر کے زور بھی تھا دل میں ہیں اور اس لئے سمتوں و ع اور ع و میں عمل کرتے ہیں۔

۱۳۲۔ اگر و ع اور و ف میں سے کے مزدوج زور صا اور صا ہوں اور اگر صدی تناؤ ت کی سمت کے ساتھ و ع اور و ف کے میلان ط اور ذ ہوں تو دفعہ (۱۴۰) سے مساواتیں

$$\frac{1}{صا} = \frac{جم ذ}{صا} + \frac{جب ف}{صا}$$

$$\frac{1}{صا} = \frac{جم ط}{صا} + \frac{صا}{صا}$$

حاصل مولیٰ ہیں۔ جہاں ط اور ذ میں ربط ہے

$$صا ذ = صا ط = صا$$

و اور ذ کو سا قط کرنے سے

$$صا صا = صا$$

پس معلوم ہوا کہ کسی نقطہ پر دو مزدوج زوروں کا حاصل ضرب مستقل ہوتا ہے اور یہ مستقل صدری تناؤں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

۱۳۳۔ یہی نتیجہ دو مثلثی عناصر و ا ب، و ا ب کے توازن کی شرطوں کو لکھ لینے سے حاصل ہو سکتے ہیں جہاں ا ب اور ا ب، و ع اور و ف کے متوازی ہیں۔

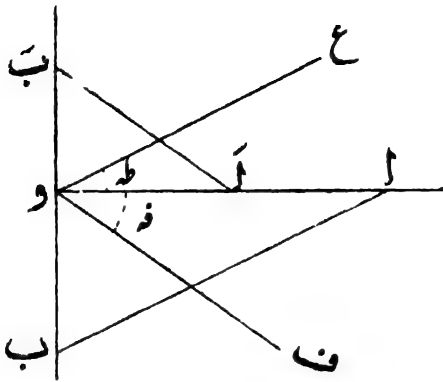
اس طرح ہمیں مساواتیں

(۱۴۱)

$$صا جم ذ = صا جب ط، صا جب ذ = صا جم ط$$

$$صا جم ط = صا جب ذ، صا جب ط = صا جم ذ$$

حاصل ہونی چاہئیں۔ ان سے ہم مذکورہ بالا نتائج حاصل کر سکتے ہیں۔



۱۴۴۔ اب اگر ہم ایک ملائم جہلی کی صورت پر غور کریں جو سیالی دباؤ کے زیر عمل ہے اور اس کے ایک چھوٹے عنصر کے توازن پر غور کریں تو گزشتہ تین دفعات کے نتائج اس صورت پر بالکل عاید ہو جاتے ہیں کیونکہ عمادی دباؤ کے اجزائے تحلیلی انتہا میں بمقابلہ ماسی عمل کے معدوم ہو جاتے ہیں۔

۱۴۵۔ صدری تناؤ کی کسی شکل کی ایک ملائم سطح سیال کے زیر عمل ہے۔ کسی نقطہ پر کے دباؤ صدری تناؤں، اور ان تناؤں کی سمتوں میں انخاؤں کے درمیان ربط معلوم کرنا مطلوب ہے۔
فرض کرو کہ ن کے متصل نقطے ق، ق ہیں جو ن میں سے گزریوالے

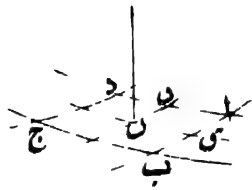
لہ طالب علم کو یہ سمجھ لینا چاہیے کہ صدری تناؤں اور صدری انخاؤں کے درمیان کوئی تعلق ہے۔

مثلاً ایک ایسی جہلی پر غور کرو جو ایک اسطوانہ کے گرد لیٹی گئی ہے جہلی پر اسی گھائی کے مرفوظی خطوط (Helical lines) کی کچھ تعداد کھینچو۔

جہلی کو ان خطوط کی سمتوں میں تلایا جاسکتا ہے جو بالا خر بڑے سے بڑے تناؤ کی سمتیں بن جائیں گی اس صورت میں عمودی تناؤ صفر ہو گا اور ایک کون پر کے اندر کی سمت اس کون کے شعاعوں کی

صدری تناؤ کے خطوط ن ق ، ن ق پر واقع ہیں۔ ق اور ق میں سے عمادی
مستوی کیچو جون ف اور ن ق یر سمو دھوں اور سطح کو ا ب ، ا ک نوسوں میں
(۱۳۸) قطع کریں۔

فرض کرو کہ ق ن ، ق ن مدودہ کے متصلہ نقطوں میں سے گزرنے والی
عمادی مستوی تو میں ب ج ، ج ت راستی گئی ہیں۔



عصر ب د ، داسی قوتوں ت * ا ب ،

ت ج د ، ت ا د ، ت ب ج اور عمادی قوت

د * ا ب * ب ج کے زیر عمل ساکن ہے۔

فرض کرو کہ مسعیوں ن ق ن ق

کے نقطہ ن پر کے نصف قطر انخار ر

ہیں۔ تب ن یر عمادی سمت میں قوتوں کو

تحلیل کرنے سے ہیں بالآخر حاصل ہوگا

$$د * ا ب * ب ج = ۲ ت ا ب \frac{۱}{ر} + ۲ ت ب ج \frac{۱}{ر}$$

$$د = \frac{ت}{ر} + \frac{ت}{ر}$$

اگر سطح کی نوعیت اس طرح کی ہو کہ ت = ت تو مساوات بالا ہو جائیگی

$$\frac{۱}{ر} + \frac{۱}{ر} = \frac{۱}{ر} + \frac{۱}{ر} = \frac{۲}{ر}$$

جہاں سا ، سا صدری نصف قطر انخار ہیں۔

پس اگر سطح کی مساوات ی = ن (۱۴) ہو تو

$$\frac{د}{ت} = \{ ۱ + \left(\frac{جف ی}{جف لا} \right) + \left(\frac{جف ی}{جف ا} \right) \}$$

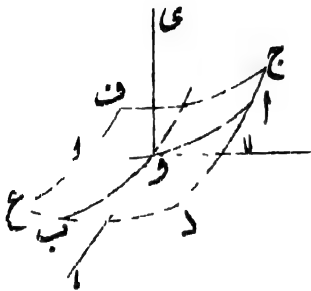
$$= \{ ۱ + \left(\frac{جف ی}{جف ا} \right) \} - \frac{جف ی}{جف لا} - \frac{جف ی}{جف ا} + \frac{جف ی}{جف لا}$$

$$+ \left\{ \left(\frac{\text{جھ م ی}}{\text{جھ م ا}} \right) + 1 \right\} \frac{\text{جھ م ی}}{\text{جھ م ا}}$$

اس مساوات کو لگراج اور پائسن لے حاصل کیا تھا۔

۱۴۶۔ کسی سمت میں تناؤ۔ اگر ت اور ت کی سمتیں وہی نہ ہوں جو صدری تیاؤں کی ہیں تو مساوات میں ماسی عمل داخل ہوگا۔

سطح پر کوئی نقطہ ولو اور و ل
دب ایک دوسرے پر علی التوائہ لے کر
فرض کر دو کہ ان سمتوں میں تناؤ ت، ت
ہیں اور ماسی اعمال ت ت۔ وہ
عمادی کھینچو۔



عمادی مستویوں (وی) اب وی
کے متوازی اور ان سے بالکل فریب جا،
مستوی کھینچو اور فرض کر دو کہ یہ مستوی سطح کو
ج د، د ع، ع ف، ف ج میں
قطع کرتے ہیں۔

تب بالآخر ج د اور ع ف کے ماسی اعمال ت ت، ج د اور ت ع ف
ایک دوسرے کے مساوی گر سمت میں مخالفت ہیں، یہی حال ع د اور ج ف پر کے
ماسی اعمال کا ہے۔

(۱۴۹)

پس وی کے گزریاؤں پر لینے سے دفعہ ۱۳۸ کی طرح، یہ معلوم ہو جاتا ہے کہ ت = ت۔
اگر مخی ج د کے نقطہ ایر کے ماس کا میلان مستوی لاما کے ساتھ طہ ہوو

$$\text{مس ط} = \frac{\text{جھ م ی}}{\text{جھ م ا}} \times \frac{\text{ا}}{\text{د}}$$

لے کیونکہ ہم کہہ سکتے ہیں

$$\text{مس ط} = \text{ف} (د) = \text{ف} (ا) + (ا) \times \text{ف} (ا) + \dots$$

اور اسی طرح نقطہ ڈیرے

$$\text{مس لہ} = \frac{\text{جف ای}}{\text{جف لاجف ا}} \quad (-) \quad \text{ڈا}$$

یہ سمت وی میں اعمال دت × ج د اور دت × ع ف کا مجموعہ

$$= \text{دت} \times \text{ج د} \frac{\text{جف ای}}{\text{جف لاجف ا}} \quad \text{ڈا} - \text{دت} \times \text{ع ف} \frac{\text{جف ای}}{\text{جف لاجف ا}} \quad (-) \quad \text{ڈا}$$

$$= \text{دت} \times \text{ج د} \times \text{ع د} \times \frac{\text{جف ای}}{\text{جف لاجف ا}}$$

اور اسی طرح کی رقم عمل دت سے حاصل ہوگی۔

وہی کی سمت میں تحلیل کرنے سے اب ہمیں حاصل ہوگا

$$ر \times ج د \times ع د = ۲ \times ج د \quad \text{ڈا} + ۲ \times \text{دت} \times \text{ع د} \quad \text{وب} \quad \text{ڈا} + \text{دت}$$

$$\times ج د \times \text{ع د} \times \frac{\text{جف ای}}{\text{جف لاجف ا}} - ۲ \times \frac{\text{دت}}{\text{ر}} + \frac{\text{دت}}{\text{ر}} = ۲ \times \frac{\text{جت ای لہ}}{\text{جف لاجف ا}}$$

۱۴۷ — دفعات (۱۳۹) اور (۱۴۵) سے بھی یہی نتیجہ حاصل کیا جاسکتا ہے

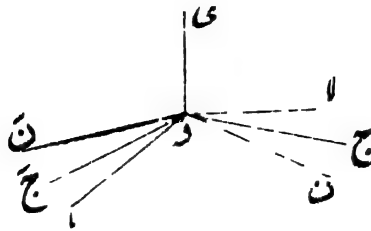
اور اگر یہ یہ طریقہ بہت طویل ہے لیکن اس میں یہ فائدہ ہے کہ اس میں مددی تناؤ کی سمتوں اور
 مددی انہماکی سمتوں کے درمیان تمیز کرنے کی اہمیت ایسے طور پر واضح ہو جاتی
 ہے۔

بقیہ نوٹ صفحہ ۱۲۸ — جہاں ف (۰) = مس لہ کی قیمت ڈیرہ یعنی $\frac{\text{جف ای}}{\text{جف لاجف ا}}$ کی قیمت، اور ف (۰) =

$$\frac{\text{جف لاجف ا}}{\text{جف ای}} \quad \text{ڈا} \quad \text{یا} \quad \left(\frac{\text{جف ای}}{\text{جف لاجف ا}} \right) \text{ کی قیمت و پر۔}$$

لہ علامتوں کے توازن کے عام مسئلہ پر ڈبل، ایچ، بیسٹ نے

س بحث کی ہے۔ *Quarterly Journal of Mathematics Vol IV 1890*



(۱۵۰) اگر کسی دو علی القوائم سمتوں والا، واما میں تناؤ تھا، تہا ہوں اور ان میں سے کسی ایک سمت میں حماسی عمل تھا، پورا سمتوں ون، ون میں صدری تناؤ تھا، تہا ہوں اور زاویہ ن والا = ط، تو دفعہ (۱۳۹) کی رو سے

$$ت = ت + جب ط + دت جب ط$$

$$ت = ت + جب ط + دت جب ط$$

$$ت = (ت - دت) جب ط + جم ط$$

اب اگر صدری انخما کی سمتیں وج، وج ہوں اور زاویہ ج والا = ف، اور انخما کے صدری نصف قطر مرا، مرا ہوں اور والا، والا، ون میں سے گزرنے والی عمادی تراشوں کے نصف قطر مرا، مرا، ر، ر ہوں تو

$$\frac{1}{ر} = \frac{جم ف}{مرا} + \frac{جب ف}{مرا} ، \frac{1}{ر} = \frac{جب ف}{مرا} + \frac{جم ف}{مرا}$$

$$\frac{1}{ر} = \frac{جم (ط - ف)}{مرا} + \frac{جب (ط - ف)}{مرا} ، \frac{1}{ر} = \frac{جب (ط - ف)}{مرا} + \frac{جم (ط - ف)}{مرا}$$

$$\begin{aligned} & \frac{f}{r_1} + \frac{f}{r_2} = (t \text{ جم } \phi + t \text{ جب } \phi) \left(\frac{\text{جم}^2 \phi}{r_1} + \frac{\text{جب}^2 \phi}{r_2} \right) \\ & + (t \text{ جب } \phi + t \text{ جم } \phi) \left(\frac{\text{جب}^2 \phi}{r_1} + \frac{\text{جم}^2 \phi}{r_2} \right) \\ & = \left\{ \frac{\text{جم}^2 (\phi - \phi)}{r_1} - \frac{\text{جب} \phi \text{ جم} \phi}{r_1} + \frac{\text{جب} \phi (\phi - \phi)}{r_2} + \frac{\text{جب} \phi \text{ جب} \phi}{r_2} \right\} \\ & + \left\{ \frac{\text{جب}^2 (\phi - \phi)}{r_1} - \frac{\text{جم} \phi \text{ جب} \phi}{r_1} + \frac{\text{جم}^2 (\phi - \phi)}{r_2} - \frac{\text{جم} \phi \text{ جم} \phi}{r_2} \right\} \\ & = \frac{t}{r_1} + \frac{t}{r_2} - (t - t) \left(\text{جب} \phi \text{ جم} \phi \text{ جب} \phi \right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ & = \frac{t}{r_1} + \frac{t}{r_2} - t \text{ جب} \phi \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{f}{r_1} + \frac{f}{r_2} + t \text{ جب} \phi \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{t}{r_1} + \frac{t}{r_2} = d$$

کس د کے قرب و جوار میں سطح کی مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$y^2 = \frac{a^2}{r_1} + \frac{a^2}{r_2} \quad \text{اگر } d \text{ ج } \phi \text{ اور } d \text{ س کے عماد کو محور مانا جائے و لاؤ ا،}$$

وی کئے حوالے سے یہ مساوات ہوگی $y^2 = (a^2 + f^2) \phi^2 + a^2 \phi + b^2$

اور چونکہ محوروں کے ان دونوں کا درمیانی زاویہ ϕ ہے اس لئے

$$\text{جب} \phi = \frac{f}{(a^2 + f^2)^{1/2}}$$

$$\text{اور } (a^2 + f^2) \phi^2 = a^2 \phi + b^2 \quad \text{اور } (a^2 + f^2) \phi^2 = a^2 \phi + b^2$$

$$= \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) - \frac{f}{r_1 r_2}$$

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)^2 = \text{جف}^2 \text{ اور ف سرکجا د پر جف لاجف} \text{ کی قیمت ہے۔} \quad (151)$$

$$\text{جب } 2 \text{ ف} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) = \frac{\text{جف}^2}{\text{جف لاجف}}$$

$$\therefore \frac{2 \text{ ف}}{r} + \frac{2 \text{ ف}}{r'} = \frac{\text{جف}^2}{\text{جف لاجف}} = 2 \text{ ف}$$

۱۴۸۔ ہم یہ دیکھتے ہیں کہ اگر انتخاب شدہ سمتیں دلاوا، صدری انخا کی سمتوں پر منطبق ہو جائیں تو $d = 0$ اور ضابطہ بالا

$$d = \frac{2 \text{ ف}}{r} + \frac{2 \text{ ف}}{r'}$$

میں تحول ہو جاتا ہے۔ پس یہ ضابطہ درست رہتا ہے جبکہ منتخبہ سمتیں صدری تناؤ کی سمتیں ہوں یا صدری انخا کی سمتیں۔

۱۴۹۔ اگر ہم ایک ایسی سطح کا تصور کریں جس کی نوعیت اس طرح کی ہو کہ اس کے کسی نقطہ پر کا تناؤ اس نقطہ میں سے گزرنے والے ایک خط تقسیم پر ہمیشہ عمود وار عمل کرے تو یہ بتایا جاسکتا ہے کہ کسی نقطہ پر کا تناؤ ہر سمت میں دہی ہوتا ہے۔

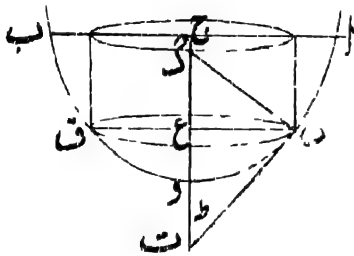
اگر ایسی سطح کے ایک چھوٹے مثلثی حصہ پر غور کیا جائے تو ماسی مستوی کے اندر کا توازن مثلث کے ضلعوں کے تناؤ سے پوری طرح متعین ہو جاتا ہے کیونکہ ماسی مستوی میں کے قوار عالم (اگر کوئی ہوں) بمقابلہ تناؤں کے بالاتر معدوم ہو جاتی ہیں اور چونکہ ضلعوں کے تناؤ اضلاع پر عمود وار ہیں ان کو ضلعوں کے طولوں کے متناسب ہونا چاہیے اور اس لئے تمام سمتوں میں تناؤ کے ناب دہی ہیں۔

نیز سطح پر تناؤ ہر جگہ دہی ہوگا کیونکہ اگر ایک چھوٹے مستطیلی عنصر پر غور کیا جائے تو متقابلہ ضلعوں پر کے تناؤ مساوی ہونے چاہئیں۔

اس قسم کی سطح کا تصور کرنا بالکل ایسا ہی ہے جیسا کہ ایک کال استوار جسم یا ایک سیال کال کا تصور کرنا ہے تاہم ایسی سطحوں کے قریب ترین نوٹے مائع جھیلوں کی

صورت میں ملتے ہیں۔ مثلاً صابونی ببلہ کی صورت میں یا ان جھیلوں کی صورت میں جو شیشے کی بوتل میں نظر آئیں گی۔ جبکہ اس کے اندر کے مائع کو خوب ہلایا جائے۔
الغ جھیلوں کی بحث کو ہم آئندہ باب تک ملتوی رکھتے ہیں۔

۱۵۰۔ ایک ظرف جو مائع اور امتداد پذیر شے سے بنایا گیا ہے گردش سطح کی شکل کا ہے۔ اس کو انتصابی محور کے ساتھ پکڑ کر متجانس مائع سے (۱۵۲) بھر دیا گیا ہے۔ کسی نقطہ پر مائع میں تناؤ معلوم کرنا مطلوب ہیں۔
فرض کرو کہ ظرف کا زیر ترین نقطہ ہے۔ و کو مبدأ قرار دو۔



لا کو انتصاباً اوپر دار بناؤ اور
فرض کرو کہ کوئی افقی تراش
ن ع ق ہے۔ اوپر کا
کنارہ ا ج ب ہے
جو ثابت ہے۔

افقی تراش ن ق
کے تمام نقطوں پر دباؤ صریحاً
ایسی ہے۔

فرض کرو کہ نصف الہیاری تھا۔ اس سے یعنی وہ تناؤ جو منحنی ا ن کے
نقطہ ن پر کے تماس کی سمت میں نقطہ ن پر مل کر رہے اور فرض کرو کہ نقطہ ن پر
ایسی تناؤ ت ہے۔ یہ صدر می تاؤ ہیں۔ تراش ن ق کے ساتھ ساتھ تناؤ ت
کا انتصابی حاصل سطح ن و ق پر کے حاصل انتصابی دباؤ کی تبدیل کرتا ہے۔
پس اگر

$$و ع = لا ، ع ن = ا ، اور زاویہ ن ت و = ط$$

$$ت = ا م ا ت ج م ط = ج ت م ا ، د لا ج ت م ا ، (م - لا) ، اگر ج = م$$

اس مساوات سے ت کا تعین ہو جاتا ہے۔ اور ت مساوات

$$\frac{t}{r} + \frac{t}{r} - \frac{t}{r} = 0 \quad \text{دفعہ (۱۳۵)}$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں $d = j$ ت (م - لا) -
یہ یاد رہے کہ شعنی ان کے نقطہ ن پر نصف قطر انخار رہے اور اس کے
عمود وار جو عمادی تراش ہے اس کا نیم قطر انخار یعنی ن گ ہے۔
۱۵۱۔ اس سے زیادہ عام مسئلہ تبدیل ہے۔

ایک لامن ظرف گرنشی سطح کی شکل کا ہے اور سیالی دباؤ کے
زیر عمل ہے اس طرح پر کہ کسی دائری تراش کے تمام نقطوں پر سیالی
دباؤ وہی ہے۔ کسی نقطہ پر اسکے صوری تناؤ معلوم کرنا مطلوب ہے۔
رض کر کہ ن ع ق، ن ح ق، دو متصل دائری تراشیں ہیں اور
نقطہ ن پر کا نصف النہاری تناؤ ت ہے۔

اگر ن = سی نو دائرہ ن ق پر محور لے موازی حاصل تناؤ

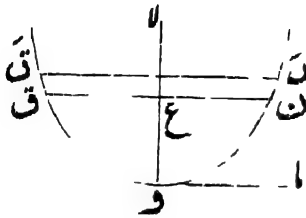
$$= 2 \pi r \frac{t}{r} = 2 \pi t$$

ن ق پر ولا کے موازی حاصل تناؤ

$$= 2 \pi r \frac{t}{r} + 2 \pi r \frac{t}{r} \left(\frac{r}{r} \right) \text{ اگر ن، ع ق، ح ق}$$

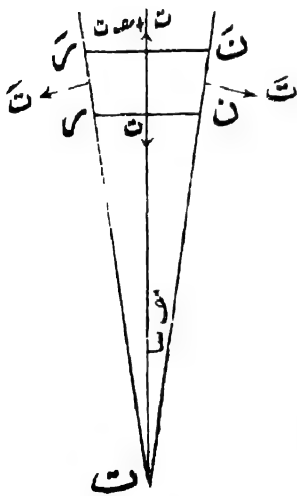
۱۵۲۔ مساوات اس صورت کے لئے اس طرح بھی حاصل ہو سکتی ہے کہ جھونا غصہ روجوا انخار کے
خطوط سے محدود ہو یعنی نصف النہاروں اور افقی دائروں سے۔ یہویر (Meunier)
کا مسئلہ استعمال کرہ اور اس کا خیال رکھو کہ انخار کے خطوط کے اتنی شعنی عسام طور پر سماوی مستوی
ہیں ہوتے۔

اس دونوں کا فرق، دائروں
ن ق، ن ق کے درمیان
سطح کی جو بیٹی ہے اس کے ولا
کے متوازی حاصل دباؤ کی
تعدیل کرتا ہے۔ یہ حاصل دباؤ
۲۲ × ۴۴ مافس $\frac{\text{فرما}}{\text{نفس}}$
کے مساوی ہے۔ اگر دائرہ
ن ف کے کسی نقطہ پر کا داؤ
دیہ۔



$$\frac{\text{فرما}}{\text{نفس}} = \left(\frac{\text{فرما}}{\text{نفس}} \right) \text{ دبا} = \frac{\text{فرما}}{\text{نفس}}$$

اور دیکھو کہ لا کا ایک دیا ہوا تعامل ہے اور اسلئے
س کا تعامل ہے اس لئے یہ مساوات تناؤ
کا تعین کرتی ہے اور ت گشتہ کی طرح مساوات



$$\frac{\text{ت}}{\text{ر}} = \frac{\text{ت}}{\text{ر}}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

۱۵۲۔ د کو سا قط کرنے سے ہیں ت اور ت
میں ایک ربط حاصل ہو گا لیکن بہتر یہ ہے کہ یہ ربط
بالراست حاصل کیا جائے۔

ایک چھوٹا عنصر ن س را لو جو نصف النہار
قوسوں ن ن، س س کے اور دائری قوسوں
ن س، ن س کے محدود ہے، فرض کرو کہ

نصف انہاری مستویوں کا درمیانی زاویہ ϕ ہے اور نصف انہاروں کے نقاط N اور S پر کے مماسی خطوط کے درمیان زاویہ 2ϕ ہے۔

تب $N = S = \phi$ اور $N = \phi$ ہے۔
 N اور S کی تنصیف کر کے والے نصف انہار کی سمت کے متوازی قوتوں کو تحلیل کرنے سے

$$\frac{F}{2} (T + M) = 2T \sin \phi \text{ جب } M = S$$

$$= T \sin \phi \quad \frac{N}{N} = T \sin \phi \quad \frac{M}{N} =$$

اور چونکہ

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{T} = \frac{F}{N} \text{ ، شکل دعو (۱۵۰)}$$

(۱۵۱) اس لئے مساوات ذیل حاصل ہوتی ہے

$$\frac{F}{2} - (T + M) = T$$

اور چونکہ $R = \text{ماقطط}$ اس لئے

$$\frac{T}{R} + \frac{T}{2} = D$$

اور اس لئے ان دو مساواتوں سے T اور D معلوم ہو جاتے ہیں۔
 پہلی مساوات سے ظاہر ہے کہ اگر کسی افقی ترائش پر T اعظم یا اقل ہو

اور اس لئے $\frac{F}{2}$ صفر ہو جائے تو

$$T = D$$

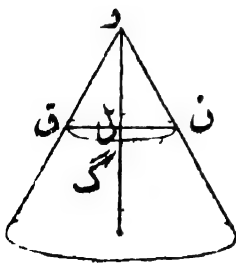
لیکن اگر M ہی اعظم یا اقل ہو تو یہ نتیجہ برآء نہیں ہوتا کیونکہ ہم یہ نتیجہ نہیں نکال سکتے کہ $\frac{F}{2}$ صفر ہے۔

پھر اگر نقطہ r = $\frac{r}{\sin \theta}$ اور اس سے $\frac{r}{\sin \theta}$ متساوی ہو۔

۱۵۳۔ مثلہ - (۱) ایک مخروطی شکل کے کامل طور پر طائر اور پکڑا ہوا تھیلے کو نیچے وار منہ کے ساتھ ایک افقی مستوی پر کور سے جوڑ دیا گیا ہے اور اس پر کے ایک چھوٹے سوراخ کے ذریعہ اس کو مانع سے بھریا گیا ہے جس سے سکون کی حالت میں اس کی شکل قائم مستدیر اسطوانہ کی شکل ہو جاتی ہے۔ اگر مستوی سے اس کا الحاق توڑ دیا جائے اور مانع باہر نکل پڑے تو اس شکل کی مساوات معلوم کرو جو یہ اختیار کریگا اگر اس کے وزن کو نظر انداز کر دیا جائے۔

فرض کرو کہ نقطہ n پر کمون on کے عمود وار سمت میں تناؤ t ہے اور سمت on میں تناؤ t ہے اور مخروط کا زاویہ راس 2α ہے۔

$$nb = \frac{t}{r} + \frac{t}{r} \text{ سے (اگر } r = \text{ لا) حاصل ہوگا}$$



$$ج \text{ ث لا} = \frac{t}{n} = \frac{t}{\text{لا سے قطعہ}}$$

یا $t = ج \text{ ث لا} \text{ سے قطعہ}$

لیکن $n = 2 \text{ ث لا} \text{ سے جمعہ} = 2 \text{ ث لا}$ حاصل انتصابی دباؤ

$$= \frac{t}{2} ج \text{ ث لا} \text{ سے}$$

ت = $\frac{1}{3}$ ج ت لاسر عم قطع
 فرض کرو کہ مانع نکل جانے کے بعد سطح جس گردش سطح کی شکل اختیار کرتی ہے
 اس کا تکوینی معنی و ن قی ہے، اور ولی = ضا، ن ل = عا، اور ت
 لفظ ن کا جواب ہے۔



اگر ن قی = مف س، معنی کی ایک چھوٹی توس

تو مف لقطع عم = مف س $(1 + \frac{ت}{ل})$

اور لاسر عم = عا $(1 + \frac{ت}{ل})$

لچک کے مقیاس کو دو نوز سمتوں میں مختلف لینے سے۔

ت اور ت کی حاصل شدہ قیمتوں کو استعمال کر کے لا کو ان دو مساواتوں
 سے ساقط کیا جاسکتا ہے اور اس طرح ضا اور عا میں ایک ربط حاصل ہو جاتا ہے۔

(۱۵۵)

پہلی مساوات میں ج ت لاسر عم قطع = $\frac{1}{3}$ رکھو اس طرح حاصل ہوگا

$$\frac{1}{\frac{ل}{۲} + 1} = \frac{فوس}{فولا} \text{ حجم عم}$$

∴ $\frac{س}{۱} \text{ حجم عم} = س - ۱ \frac{ل}{۱}$ ، اگر س کو د سے نایا جائے

یا $\frac{ل}{۱} = س (\frac{س}{۱} \text{ حجم عم})$

لا کی یہ قیمت دوسری مساوات میں مندرج کرنے سے حاصل ہوگا

لاسر عم س $(\frac{س}{۱} \text{ حجم عم}) = عا (1 + \frac{ج ت لاسر عم قطع عم س}{ل} (\frac{س}{۱} \text{ حجم عم}))$
 جو معنی کی تفرقی مساوات ہے۔

اگر لہ = کہ تو اس سے = عالم (س) جم (س) + س مس (س) جم (س) {
 (۲) ایک لامنٹ جہلی زنجیرہ مار (Catenary) کی شکل کی ہے یعنی ایسی سطح
 کی شکل کی ہے جس کی کمین ایک زنجیرہ کو اس کے مرتب کے گرد گھمانے
 سے ہوتی ہے۔ اس جہلی کے سرے نصف قطر کے دو مساوی
 دائری تختوں سے ثابت کر دئے گئے ہیں لہذا وہی ہوائی دباؤ کا اضافہ
 بیرونی ہوائی دباؤ پر د معلوم ہے۔

اس صورت میں انحناء مقابل سمتوں میں ہیں اور اگر ن پر کا عماد ن گ
 ہو تو ہر ایک نصف قطر انحناء گ کے مساوی ہوگا اور توازن کی مساواتیں ہونگی

$$ت - ت = و - ن گ \quad اور \quad ت = \frac{فر}{(ات)}$$

اور چونکہ $ن گ = \frac{۱}{س} رک \frac{فر}{(ات)} = دما$ جہاں ک زنجیرہ کا مستقل ہے

$$۲ رک (ت - ت) = د (۱ - ک)$$

جہاں ت، راس پر کا نصف انحناء ہی تناؤ ہے

$$ت = ت + \frac{د}{س} (۱ - ک)$$

ان میں سے پہلی مساوات حصہ ان کے توازن پر غور کرنے سے فوراً
 حاصل ہو سکتی ہے جہاں زنجیرہ کے راس کو ا تعبیر کرتا ہے اور پھر ت کی قیمت
 مساوات ت - ت = د سے حاصل ہو جاتی ہے۔
 اگر تختوں کے وزن کو نظر انداز کیا جائے اور یہ فرض کیا جائے کہ

اندرونی ہوا کے دباؤ سے توازن برقرار رہتا ہے تو

$$۲۲ \text{ و } ۱ = \left\{ \frac{۲}{۲} (۲ - ۲) \right\} \frac{۲}{۲} = \frac{۲}{۱} \text{ و } ۲$$

جس سے

$$۲ = ۲ \text{ و } ۲$$

اور پھر تناؤ ہو جاتے ہیں۔

$$\text{ت} = \frac{۲}{۲} \text{ و } ۲ \text{ اور } ۲ = \frac{۲}{۲} \text{ و } ۲$$

۱۵۴۔ ہم نے اب تک صرف یکساں موٹائی کے بہتروں پر غور کیا ہے لیکن ایسی صورتوں کو بھی شامل کرنے کی خاطر جن میں بہترے متغیر موٹائی کے ہوں۔ تناؤ کا زیادہ عام ناپ دریافت کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ کسی متجانس مادے کی سلاخ ا ب سے وزن و لٹکایا گیا ہے اور سلاخ کی تراش کا رقبہ کہ سے تب ن میں سے گزرنے والی تراش پر کا تناؤ، وزن و اور سلاخ کے حصہ ن ب کے وزن کو تھا ہے ہوئے ہے۔

اور اگر ان اوزان کا مجموعہ یہ کہ ہو تو نقطہ ن پر تناؤ کا ناپ فی اکائی رقبہ یہ ہوگا۔

یہ معلوم رہے کہ ت کی نسبت یہ کا بقد ر ایک کے کم ہے۔

درحقیقت اگر کسی نقطہ پر ایک ملائم بہترے کی موٹائی ع ہو اور اس پر کا تناؤ ت ہو جو معمولی ترقی سے تراش کی فی اکائی طول کے لئے معلوم کیا گیا ہے تو

$$\text{ت} = \text{ت} \text{ و } ۲ = \text{ت} \text{ و } ۲$$

$$\text{ت} = \text{ت} \text{ و } ۲$$

یا



۱۵۵۔ اس باب کے مسائل عموماً اُن سطحوں پر قابل استعمال نہ ہونگے جو غیر ملائم یا جن کی دائریت ناقص ہے۔ لیکن اگر کسی خاص صورت میں سطح کے متصلہ حصوں کا درمیانی عمل کلاً ماسی ستوسی میں ہو تو تیناؤ اور عمادی دباؤ کے درمیان محصلہ ردابط برقرار رہیں گے۔

مثلاً اگر ایک انقباضی مسدیر اسطوانہ کسی غیر ملائم شے سے بنا ہوا درسیں سیال بھر دیا جائے تو کسی نقطہ پر کا عمل کلاً ماسی سمیت میں ہوگا اور اس کی نوعیت تیناؤ کی سی ہوگی۔

امثلہ

۱۔ یہ فرض کر کے کرنا کہ اسطوانے کے اسطوانے ایک سی مادی سے سے سے ہوتے ہیں اور ہر ایک کے اندر (stress) اسی ہے اسطوانوں کی موٹائیوں میں نسبت معلوم کرو۔

۲۔ ایک اسطوانی تیرب و اچ موٹے دہان کے چتر سے بنایا گیا ہے اور اسی دہان کا ایک ڈنڈا جس کی تراش کا رقبہ $\frac{1}{2}$ مربع انچ ہے بغیر ٹوٹے کے وزن و کو میں سنبھال سکتا ہے۔ اگر اسطوانہ کو انقباضی محور کے ساتھ رکھا جائے تو معلوم کرو کہ اس میں کتنا سیال ڈالا جاسکتا ہے کہ یہ ٹوٹ جائے۔

۳۔ ڈھلے ہوئے لوہے کی تیناؤسی (Tensile) طاقت تراش کے فی مربع انچ کے لئے ۱۶۰ پونڈوں پر ایک ڈھلے ہوئے لوہے کے پانی کے ایسے تل کی موٹائی معلوم کرو جس کا اندر دنی قطر ۱۲ ہے کہ اس پر کا زور اس کی انتہائی مضبوطی کا صرف $\frac{1}{2}$ ہو جبکہ پانی کا ارتقاع ۳۸ ڈیگری ہو۔

۴۔ ایک خوب محروم و ناگوار اس جیسے دار ہے پانی سے بھر دیا گیا ہے۔ معلوم کرو کہ وقتی تیناؤ سب سے زیادہ کہاں ہے۔

یہ معلوم کرو کہ کون کی سمت میں تیناؤ کی قیمت سب سے زیادہ کہاں ہے۔

۵۔ ایک مستطیل صندوق کے اوپر کا رخ یکساں پچکدار بندہں (Band) کو (۱۵۰) اس کے متقابل ضلعوں پر مادہ دے دیے سے مذکور دیا گیا ہے بندھن دوسرے اصنلاع پر

ٹھیک بیٹھی ہے۔ اگر صندوق سے ہوا بتدو ج خارج کر دی جائے تو پچکار ہند صحن جو شکلیں اختیار کرنی ہے ان کو معلوم کرو۔ اور جب ہند صحن صندوق کی تہ کو عین مس کرے تو اس وقت کرہ برائی کے اندرونی دبیرونی دباؤں میں جو فرق ہوگا اس کو معلوم کرو۔

۶۔ دائری سوراخ کی ایک پچکار نیلی، مربع سوراخ کی ایک سدا نیلی میں رکھ دی گئی ہے جس میں وہ بیٹھتے ہوئے ٹھیک بیٹھ جاتی ہے۔ لیاں لاتما ہی طول کی ہیں۔ اگر لپیوں کے درمیان ہوا نہ ہو اور کسی دباؤ کی پچکار نیلی میں داخل کی جائے تو ثابت کرو کہ یہ دباؤ اس نسبت کے متناسب ہوگا جو پچکار نیلی کے اس حصہ کو جو سدا نیلی کو مس کرتا ہے اس حصہ سے ہے جس کی شکل کا ہے۔

۷۔ ایک طرہ جو کسی پتی سے سے بنایا گیا ہے مخروطی شکل کا ہے اس کا راس نیچے دار اور محور انصافی ہے۔ اس کو مانع سے بھر دیا گیا ہے اور اس کا سدا مد کر دیا گیا ہے اگر اس کو اپنے محور کے گرد یکساں رفتار سے گھمایا جائے تو کسی نقطہ کے صدر سی تناؤ معلوم کرو۔

۸۔ ایک کروسی پچکار لغافہ کے گرد اور اس کے اندر ہوا ہے جو کرہ ہوائی کے دباؤ (۳) پر ہے۔ اس کے اندر ہوا کی سدا سی مقدار داخل کر دی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ لغافہ کے کسی نقطہ پر کا تناؤ $\frac{2}{3} (2 - r^2) / r^2$ ہو جاتا ہے جہاں ابتدائی اور انتہائی نصف قطر کے رے بغیر کرتے ہیں۔

۹۔ ایک پچکار کروسی لغافہ میں جس کا قدرتی نصف قطر $\frac{1}{2}$ ہے ہوا داخل کی گئی ہے جس سے اس کا نصف قطر ہو جاتا ہے پھر اس کو ایک قالمہ میں جس میں سے ہوا خارج کر دی گئی ہے رکھ دیا گیا ہے جس سے اس کا نصف قطر $\frac{1}{2}$ ہو جاتا ہے۔ ہوا کی مقدار معلوم کر دو جو اس میں داخل کی گئی ہے۔ یہ مرض کر لیا جائے کہ تناؤ سطح کے اضافہ کے متناسب ہے۔

۱۰۔ نصف قطر کا ایک پچکار کروسی لغافہ ہوا سے بھر دیا گیا ہے جس کی تپش (ت) اور دباؤ وہی ہیں جو گرد کی ہوا کے ہیں۔ تناؤ سطح کے اضافہ کے متناسب ہے اور اگر اندرونی ہوا کی مقدار دو چندان کر دی جائے تو نصف قطر $\frac{1}{2}$ ہو جاتا ہے اور پھر اگر اندرونی تپش کو $\frac{1}{2}$ تک بڑا دیا جائے تو نصف قطر $\frac{1}{2}$ ہو جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ

۱۶۔ ایک محب امتداد نایذیر لائم لفاذ گردسی سطح کی شکل کا ہے اور اس کے گردس کا محور انتصابی ہے۔ یہ لفاذ ادر سے آئی داؤ کے زیر عمل ہے۔ ثابت کر دو کہ نصف النہاروں کی سمت میں سب سے چورے صدر یر کا سناؤ اعظم یا اقل ہوگا۔ بموجب اس کے کہ یہ تناؤ نصف النہاروں کے عمود وار تناؤ سے کم یا زیادہ ہو۔

۱۷۔ قائم مسند یر مخروط کی شکل کا ایک لائم تھیلہ مانع سے عین بھر دیا گیا ہے اور اس کے قاعدے کی کور ایک استوار مستوی کے ساتھ ثبت کر دی گئی ہے۔ قاعدے کے مرکز سے دایع قوتیں مانع پر عمل کرتی ہیں جو ایسے بدلنی ہیں جیسے حاصلہ۔ کسی نقطہ یر صدر سی تناؤ معلوم کرو۔

اگر استوار مستوی میں ایک سوراخ کر دیا جائے اور اس میں فشار لگا دیا جائے اور پھر اس فشار یر ایک ضرب لگائی جائے تو کسی نقطہ یر صدر سی دیکھا تناؤ معلوم کرو۔

۱۸۔ اگر دند (۱۵۱) میں، ظرف مکانی نما کی شکل کا ہو اور اس کے میں سے گزرنے والی افقی تراش کے ہر نقطہ یر صدر سی تناؤ مساوی ہوں تو ثابت کر دو کہ محور کا طول وتر خاص کا ہے ہوگا۔

۱۹۔ مانع کی کچھ مقدار جو ایک پتلے کر دی خول میں ہے انتصابی قطر کے گرد یکساں نفاذ سے ملبوم رہی ہے۔ کسی نقطہ یر صدر سی تناؤ معلوم کرو اور گھومنے کی رفتار میں اضافہ کے اثرات کی حاجت کرو۔

۲۰۔ ایک لائم سطح اس قسم کی ہے کہ اس کے کسی نقطہ یر کا تناؤ ہر سمت میں وہی ہوتا ہے اور جس کی شکل مساوات $y = f(x)$ سے حاصل ہوتی ہے۔ یہ سطح سیال کے زیر عمل ہے۔ کسی نقطہ یر کے دباؤ کو تناؤ کے ساتھ جو نسبت ہے اس کو معلوم کرو۔

ثابت کر دو کہ یہ نسبت سطح $m = 3y^2 (2a^2 + y^2)$ کے ایسے نقاط پر $1:3$ ہے جہاں $2a^2 = y^2$

۲۱۔ ایک قائم مسند یر اسطوانہ پگدار ادر سے بنایا گیا ہے اور اس کے سرے استوار مستویوں کے ساتھ لگائے گئے ہیں۔ اس کو سیالی داؤ سے متنا یا گیا ہے۔ یہ مانکر کہ نصف النہار سی اور دائری تراشوں میں تناؤ ہنگ کے کلیہ (Hooke's law) کے تابع ہیں ایسی مساواتیں معلوم کرو جو اسطوانہ کی اختیار کردہ شکل کو پوری طرح معین

کرنے میں کافی ہوں۔ اگر دباؤ مستقل ہو تو ثابت کرو کہ نصف الہیاری معنی ہے

$$۱ + ۱ = \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \right) \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \right) - \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \right) \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \right) \left\{ \frac{۱}{۲} \right\}$$

جہاں ابتدائی نصف قطر ۱، لچک کا ایک مقیاس ۱، اور مکمل کے مستقل
(ب) ج ہیں۔

۲۲ — ایک لچکدار چلی جبکہ وہ بنی ہوئی نہ ہو نصف قطر ۱ کے اسطوانے کی معنی شکل اختیار کرتی ہے۔ اگر اس کے سرے ثابت کر دئے جائیں اور اس میں ہوا داخل کی جائے اور پھر اس کے سرے بند کر دئے جائیں تو ثابت کرو کہ محور میں سے گزرنے والی کسی تراش کو محو و کرنے والا منحنی مساوات

$$(۱ + ف) \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \right) = (۱ - ۱) (ک - ۱)$$

سے حاصل ہوگا۔ جہاں ف وہ زاویہ ہے جو ماس محور کے ساتھ بناتا ہے۔ محور پر کا عمود ما، بیرونی و اندرونی دباؤں کا فرق د، اور لچک کی شرح ل ہے۔ مستقل ف، ک اور ایک تیسرے مستقل جو مساوات کے مکمل سے حاصل ہو کس طرح معلوم کئے جاسکتے ہیں۔

۲۳ — ایک طرف زمین طام اور امتداد پذیر مادہ سے بنایا گیا ہے۔ اس کی شکل ایسی سطح کی ہے جو ایک زنجیر (catenary) کو سکا میل ک ہے اپنے محور کے گرد گھمانے سے پیدا ہوتی ہے۔ اگر محور سے لا فاصلہ بیرونی صدر ہی سن او ت، ت ہوں تو ثابت کرو کہ

$$۲ - ت - ت = ۲ - ت = لا / ک : حسر ۲ لا / ک$$

جبکہ یہ فرض کر لیا جائے کہ اندرونی و بیرونی دباؤں کا فرق مستقل ہے۔

۲۴ — اگر ایک طام طرف جس میں سکھین، حطاد ویر کو اپنے فاعدے کے گرد گھمانے سے ہوتی ہے مائع سے عین بھرا ہوا ہو جو بغیر کسی بیرونی قوتوں کے عمل کے محور کے گرد یکساں رفتار سے گھوم رہا ہو تو ثابت کرو کہ نصف الہیاری

منحنیوں کی سمت میں اور ان کے علی القوائم سمت میں تناؤں کی نسبت ۲ : ۱ ہے۔
یہ مان لیا گیا ہے کہ دباؤ محور پر صفر ہو جانا ہے۔

۲۵۔ ایک کامل طور پر لام غلط کی تکنین خطہ دیر کو اپنے محور کے گرد گھمے سے ہوئی ہے اس کا محور انقباضی ہے۔ اگر طر یا نی سے تقریباً بھرا ہوا ہو تو مات کر کہ ایسے نقطہ پر کا افقی تناؤ جہاں مماسی مستوی، افق کے ساتھ ۴۵° کا میلان

رکھا ہے ریر ترین نقطہ پر کے تناؤ کا ۲/۱ (۲۳ - ۲۳/۱۲۸) ہے۔ ظرف بالکل

بھرا ہوا کیوں نہ ہونا چاہیے۔

۲۶۔ مانع کے ۲/۱ ایک طر اس طرح بنایا گیا ہے۔ ایک بے وزن تختی کے ساتھ، کیڑے کا ایک لام غلط جس کی شکل نیم قطر ۱ کے کرہ کے منطفہ کی ہے لگا دیا گیا ہے اس کرے کی ایک مستوی تراش تختی پر ٹھیک آ جاتی ہے اور دوسری کرہ کے مرکز میں تھے گزرتی ہے۔ اس ظرف کو بڑی تراش کی کور سے تمام کر غیر متجانس مانع سے عہر دیا گیا ہے جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے ی (۱ - ی) جہاں ی گہرائی ہے۔ صدری تناؤ کی نسبت معلوم کرو۔

۲۷۔ ایک امتداد نا پذیر لام غلط لفظ کی شکل گرد متی مکانی منا (دو تر خاص م ۱) کی ہے۔ یہ لفظ ک نصف قطر کے ایک ثابت افقی دائرہ سے ٹک رہا ہے۔ اس میں کثافت کا سیال ہے جو غلاف کے انتصابی محور کے گرد زاویائی رفتار

(ج/۲ ب) سے گھوم رہا ہے۔ ثابت کر دو کہ لفظ کے کسی نقطہ پر محور سے

ر فاصلہ پر افقی تناؤ ہوگا

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right\} \frac{k \left\{ (r^2 + a^2) - (r^2 + b^2) \right\}}{(r^2 + a^2)}$$

۲۸۔ ایک لام غلط جہلی گرد غشی سطح کی شکل کی ہے نصف الہاری منحنی اس طرح کا ہے کہ کسی نقطہ پر کا عماد، نصف قطر انحناء کا ن گنا ہے۔ جہلی کو مانع سے عین بھر دیا

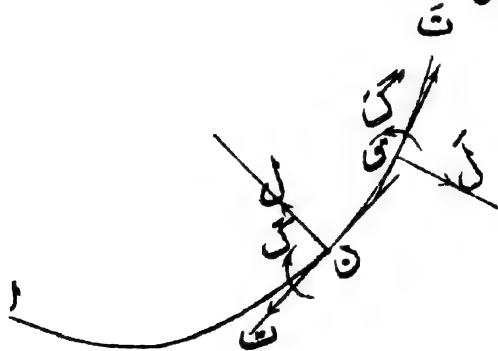
کیا ہے۔ پورا نظام ٹھوس جسم کی طرح محور کے گرد یکساں راوی رفتار سے گھوم رہا ہے
 اگر مان رہا ہوں تو میں نکل نہ کر رہا ہوں اور محور پر دباؤ سمجھ رہا ہوں کہ اس کا
 کسی نقطہ پر صدی تناؤ کی سبب ۳-۴ ن ۱۰ ہوگی۔

باب

(۱۶۱)

استوار یا کچھدار پترا سیالی دباؤ کے زیر عمل

۱۵۶۔ اب ہم اسطوائی پترے کی صورت پر غور کرتے ہیں جو سیالی دباؤ کے زیر عمل ہے اس طرح کہ کسی کون کے ہر نقطہ پر یہ دباؤ وہی ہے۔ اگر کمبوز کے علی القوائم ایک عمودی تراش اف ق لی جائے تو ان میں سے گزرنے والے اور کاغذ کی سطح پر عمود وار کون سے جو دو حصے جدا ہونگے ان کے درمیان کا زور ایک مساوی قوت، ایک جڑی قوت، اور ایک جھٹ پڑھل ہو گا۔



کون کا اکائی طول لیکر ہم ان مقداروں کو ت، ل، ہگ سے تعبیر کریں گے۔ یہ ذہن نشین رہے کہ عنصر ن ق کے نقطہ ن پر عمل کرنے والے زور ت، ل، ہگ ہیں اور مخالف سمتوں میں عنصر ن ق کے

جہاں نقطہ ن بر کا لطف فط انخدا ہے۔
اس صورت میں تیسری مساوات ہو جائیگی

$$\frac{ل}{ر} = \frac{ع}{ر} - \frac{فر}{فرقہ}$$

اور اس لئے پہلی مساوات سے

$$\frac{وت}{فرقہ} = \frac{ع}{ر} - \frac{فر}{فرقہ}$$

اس طرح

سک۔ ع۔ ر جہاں ک مستقل ہے۔

دوسری مساوات میں ان قیمتوں کو مدرج کرنے سے

$$\frac{ح}{ر} - \frac{فر}{فرقہ} = \frac{ع}{ر} - \frac{فر}{فرقہ} + ک = \frac{ع}{ر} = در$$

اس مساوات سے پترے کی اختیار کردہ شکل کا تعین ہو جائے گا
جبکہ دبا کا قانون دیکھا رہا اور دبا کا قانون معلوم ہو جائے گا جبکہ اختیار کردہ
شکل دی گئی ہو۔

ایسی صورت میں جبکہ د مستقل ہو یا ر کا ایک دیا ہو اتنا عمل ہو تو

$$\left(\frac{فر}{فرقہ} \right) = ع - ر$$

ی رکھنے مساوات بالا کا پہلا تکمیل حاصل ہو سکتا ہے اور اس طرح ہم

فرقہ کو ر کی رقوم میں معلوم کر لیتے ہیں۔

۱۵۸ — اگر قدرتا پتر دی ہوئی اسطوائی شکل کا ہو اور اس کو قدرتی شکل سے
جھکایا جائے تو جفت گ جو چکاؤ کا جفت ہے انخدا کے لتیر کے متناسب
ہوگا۔ اس طرح اگر ن بر صدری نصف قط انخدا ہو تو

$$ک = ع \left(\frac{۱}{ر} - \frac{۱}{ر} \right)$$

اس مساوات کی صداقت اس معروضہ پر مبنی ہے کہ اوسط ایشہ کا طول کمونوں کے علی الاعواء غیر متغیر رہتا ہے۔ ہم نے یہ بھی مان لیا ہے کہ یہ دنی سیالی دباؤ کے وجود سے مساوات پر کسی قسم کا اثر نہیں ہوتا۔

۱۵۹۔ ناقصی اسطوانہ۔ ان مساواتوں کے استعمال کی توضیح کے لئے

ہم ناقصی اسطوانہ کی صورت پر غور کرتے ہیں جو کسی پتلی اسوارٹھ سے بنا ہوا ہے سزوں پر مبدعے اور ہوا سے بھرا ہوا ہے جس کا دباؤ بیرونی ہوا کے دباؤ سے لغور د کے زیادہ ہے۔

لی کو سا قط کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{F_z}{F_z} + T = D$$

مزدوج محور کے ایک سرے سے F_z اور ذہ کو ناپنے سے

$$= \frac{J_z}{I_z} - \frac{(J_z + J_z)}{I_z}$$

اور مبدلوں کو بدلنے کے طریقہ سے یہ معلوم ہوگا کہ

$$T = D (J_z + J_z) - (J_z + J_z) = J_z + J_z$$

$$L = (J_z - J_z) - (J_z - J_z) = (J_z - J_z) - (J_z - J_z)$$

تشاکل کی رو سے اور نیز محل ورد عمل کے مساوی ہونے کے کلیہ کو استعمال کرنے سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ او جین (Apes) پر لی صفر ہو جاتا ہے یعنی جبکہ $F_z = 0$ اور جبکہ $F_z = 0$ ۔

پس یہ معلوم ہوگا کہ $A = 0$ اور $B = 0$ اور اس لئے

$$ت = \frac{د ا ب}{ج د} \quad اور \quad ل = \frac{د ا - ب ا}{ب} \quad ج \quad د \quad جب \quad د \quad ج \quad م \quad ف$$

$$نیز \quad \frac{فرگ}{فرق} = ل = ر = \frac{د (ا - ب ا) (ا ب ا - ج ب ا)}{(ا ا - ج ب ا + ب ا - ج م ا)}$$

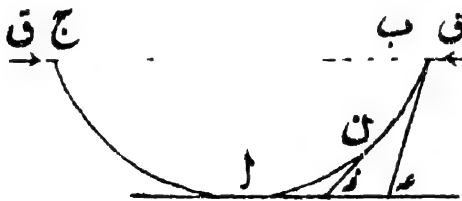
$$گ = \frac{۱}{۲} = د (ا ا - ج ب ا + ب ا - ج م ا) \quad (مستقل)$$

$$= \frac{۱}{۲} = د (ج د + مستقل)$$

$$اس \quad ط \quad ح \quad گ - گ = \frac{۱}{۲} = د (ج د - ج د)$$

۱۴۰ - ثوبیہ -

ہم نے دفعہ (۱۳۴) میں یہ بنا دیا ہے کہ ثوبیہ اور لدنیہ متماثلہ وہی منحنی ہیں۔
اگر ایک پتلی لچکدار تختی کے مقابل کے کناروں کو ایک دوسرے کی طرف
کھینچ کر ایک پت یا تنی ہوئی چادر کے دریہ ملا دیا جائے تو منحنی پیدا شدہ دفعہ
(۱۳۳) کا ثوبیہ ہو گا۔



اس صورت میں د = ۰ اور مشق کے طور پر یہ دیکھ لینا مفید ہو گا کہ دفعہ (۱۵۶)
کی مساوات کے مکمل سے ثوبیہ کی ذاتی مساوات حاصل ہوتی ہے۔
اگر ملائے والی چادر کا تناؤ ق ہو اور ن پر کا تناؤ اور حزی قوت
علی الترتیب ت اور ل ہوں تو پتے کے حصہ ن ب کے توازن پر
غور کرنے سے یہ مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

ت = - ق جم ف، ل = - ق جب ف

۱۶۱۔ ایک پتلا پچلدار پتلا دوتوازی ثابت ملاخوں پر رکھا ہوا ہے۔ اس پر دباؤ ڈالکر اس کو توبیہ کی شکل میں تبدیل کرنا مقصود ہے۔ دباؤ کا قانون معلوم کرو۔
مقاویرت اور گ دونوں ان خطوں پر صفر ہو جائے ہیں جسلاخوں کو مس کرتے ہیں۔ اور اس لئے ان خطوں پر نصف قطر انخلا متناہی ہوگا۔
پس مساوات

$$ت = ک - \frac{ع}{r_2}$$

میں ہم دیکھتے ہیں کہ ک = اور اس لئے

$$ت = - \frac{ع}{r_2}$$

توبیہ کی ذاتی مساوات ہے

$$r_2 = م (جم ف - جم ع) \frac{1}{2}$$

اور دباؤ و مساوات بن سے حاصل ہوتا ہے

$$در = \frac{ع}{r_2} - \frac{ع}{r_2} - \frac{ع}{r_2} \left(\frac{فر}{فر} \right) - \frac{ع}{r_2}$$

عمل انداز سے یہ معلوم ہوگا کہ

$$در = \frac{ع جم ع}{r_2}$$

اب توبیہ میں دفعہ (۱۳۳)

$$ر = \frac{م}{ن}$$

$$د = ن ل \times \frac{ع جم ع}{م}$$

اس طرح

اور اس لئے مطلوبہ دباؤ، ث کثافت کے مائع کو ڈالنے سے حاصل ہو سکتا ہے

ایسا کہ $\text{ح جم ع} = \text{ج ث م}^2$

پس تویہ کی شکل مساوات بالا سے حاصل شدہ کثافت کے مائع کو سلاخوں کی ہمارے سطح تک ڈالنے سے برقرار رکھی جاسکتی ہے۔

مزید براں $\text{ل} = \frac{\text{ج}}{\text{ر}} \times \frac{\text{فر}}{\text{فر}} = \frac{\text{ج}}{\text{ر}} \times \frac{\text{فر}}{\text{فر}}$ جب ف

یہ $\text{ل} = \text{ج ث م}^2 \times \text{جب ف قطعہ}$
جہاں بائیں طرف کے حصہ کی دائیں طرف کے حصہ پر جی قوت لی
ہے جو نقطہ ثقل پر اندر کی طرف عمل کرتی ہے۔ اس طرح - لی بائیں طرف کے
حصہ پر عمل کو تعبیر کرتا ہے۔
اس لئے ب اور ج یر

- لی = ج ث م مس

اس آخری نتیجہ کی جانچ اس امر کے معائنہ سے ہو سکتی ہے کہ سلاخوں کے تعامل مائع کے وزن کو تھامتے ہیں۔

اس طرح

- لی جم ع = ج ث م ل فر

$\text{ج ث م} = \frac{\text{ج}}{\text{ر}} \times \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \times \frac{\text{فر}}{\text{فر}}$

$\text{ج ث م} = \frac{\text{ج}}{\text{ر}} \times \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \times \frac{\text{فر}}{\text{فر}}$ جب ع

۱۶۲۔ اگر ایک دئے ہوئے پترے کو موڑنے سے لدنیہ حاصل کیا جائے اور سرے پر گئے کوئوں کو ایک ہی افقی مستوی میں ثابت کر دیا جائے تو ب

س = مک مس نہ ہے۔ اس پترے کے مقعر حصہ پر ہوا کا دباؤ بیرونی ہوا کے دباؤ سے عدد د کے زیادہ ہے اور پترے کے محور کے متوازی دو مساوی قوتوں سے تھا گیا ہے۔ یہ قوتیں اس سے زاویائی فاصلہ پر عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{ن}{دک} = \text{جم ذ قطع} - ۱ + د - د لوک مس \left(\frac{ن}{د} + \frac{ن}{د} \right)$$

$$\frac{لی}{دک} = \text{جب ذ قطع} - مس ذ - \text{جم ذ لوک مس} \left(\frac{ن}{د} + \frac{ن}{د} \right)$$

$$\frac{مگ}{دک} = \text{قط ذ قطع} - \frac{۱}{د} \text{قط ذ} - \frac{۱}{د} \text{لوک مس} \left(\frac{ن}{د} + \frac{ن}{د} \right) + ک$$

$$\text{جہاں } ک = \frac{۱}{د} \left\{ \text{لوک مس} \left(\frac{ن}{د} + \frac{ن}{د} \right) \right\} - \frac{۱}{د} \text{قط ذ}$$

نہز نامت کرو کہ تھا سے ۱۰ الی ہر قوت

$$= \text{دک لوک مس} \left(\frac{ن}{د} + \frac{ن}{د} \right)$$

۵۔ ایک مستوی لچکدار پترے دو متوازی افقی ڈنڈوں پر ٹکا ہوا ہے اور برکی ہوائے متقل دباؤ سے اس کو ڈنڈوں کے درمیان نیچے کی طرف موڑا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ نصف قطر اچنی، اور انصراف مساوات

$$\left(\frac{فر}{ذ} \right) = ک - \frac{۲}{د} - \frac{۲}{د} - \frac{۲}{د}$$

سے مربوط ہونگے۔

۶۔ دباؤ کا کلمہ معلوم کرو جو اس پترے کو زنجیرہ کی شکل میں جھکا دے۔

۷۔ اگر اسی پترے کو ایک مکانی اسطوانے کی شکل میں جھکا دیا جائے تو ثابت کرو کہ اس سے زاویائی انصراف پر سیالی دباؤ ایسے بدلتا ہے جیسے

$$\text{جم ذ} (۷ - ۶)$$

باب

قوت شعری

۱۶۳۔۔۔ یہ ایک مشہور بات ہے کہ اگر چھوٹے سوراخ کی ایک شیشے کی نلی پانی میں ڈبو دی جائے تو نلی کے اندر پانی کی سطح بیرونی پانی کی سطح سے اونچی ہو جاتی ہے۔

یہ بات بھی اتنی ہی مشہور ہے کہ اگر نلی پارہ میں ڈبو دی جائے تو اندرونی پارہ کی سطح بیرونی پارہ کی سطح سے بھی ہوگی۔ اگر شیشے کے آبخورے میں پانی ہو تو اس کو دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ خط تماس پر پانی کی سطح کا انحناء پر دار ہے اور یہ شیشہ کو ایک خاص زاویہ پر چمپی ہوئی نظر آتی ہے۔

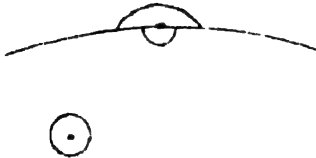
اگر آبخورے کو احتیاط سے پورا بھر دیا جائے تو پانی کی سطح آبخورے کی جوئی یا سر کے مستوی کے اوپر تک چڑھ جائے گی اور پانی سرے کے گول کنارے کے اوپر ابھرا ہوا دکھائی دینگا۔

اگر میز پر پانی گر جائے تو اس کے حدود معین ہوتے ہیں اور منحنی کنارے میز سے چمٹے ہوئے ہوتے ہیں۔

ان واقعات اور ان کے مثل دوسرے اور بہت سے واقعات کی توجیہ ان قوتوں کے وجود سے ہوتی ہے جو سیالوں کے خود سالمات کے درمیان اور نیز ٹھوس اور سیالوں کے سالمات کے درمیان عمل کرتی ہیں جبکہ ٹھوس اور سیال ایک دوسرے سے تماس رکھتے ہوں۔ کسی خاص

سالمہ کی قوت کے عمل کا میدان لا انتہا بھوٹا ہوتا ہے۔ اور چونکہ یہ سالمی قوتیں بہت چھوٹے چھوٹے فاصلوں پر عمل کرتی ہیں، اس لئے جہاں تک کہ سالمی قوتوں کا تعلق ہے متجانس جسم کا ہر عنصر بشرطیکہ وہ جسم کو محدود کرنے والی سطح کے نزدیک نہ ہو ایک ہی قسم کے حالات کے تحت ہو گا۔ لیکن خود سطح پر کسی خاص سالمہ کا کرہ عمل نامکمل ہو گا اور یہ سالمہ محدود کرنے والی سطح کے بیرونی جانب جس قسم کے مادہ کے سالمات ہوں ان کے میدان عمل میں آ جائیگا۔

پھر اگر ہم یہ مان لیں کہ میدان عمل کے خطی ابعاد بمقابلہ سطح کے نصف قطر اختلا کے لا انتہا چھوٹے ہیں تو جہاں تک سالمی قوتوں کا تعلق ہے دو متجانس اشیاء کی سطح فاصل کے تمام حصے ایک ہی قسم کے حالات کے تحت ہونگے۔ سطحی توانائی باغیچہ



جو سالمی قوتوں کے باعث پیدا ہوئی وہ سطح کے قریب کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھنے والی مستقل تناسب رکھنے والی اشیاء کی نوعیت پر منحصر ہو گا۔

۱۶۴۔ ایک متجانس سطح ایک طرف میں جائے ارض کے زیر عمل ساکن ہے اس صورت پر اصول توانائی کا استعمال ہے۔

توازن کی صورت میں توانائی باغیچہ کی قیمت ساکن یا اچل ہونی چاہیئے۔

۵۔ میدان حس میں شعری قوتیں عمل کرتی ہیں لا انتہا چھوٹا ہوتا ہے (Quineke) نے ایک سسٹیم کی تلاش میں جہاں پچاسی کا ۵۴۲ ۰۰ والی میٹر (نرالیپ تھا یا نی) کے نزدیک اور پھر کسی سطح کی چاندی کی نلی میں پانی ڈال کر تجربہ کیا۔ ہر صورت میں ایک ہی قسم کے نتائج متاثر ہوئے ہیں آئے

Pogg Ann CXXXIX (1870) p 1

یہ توانائی باقیہ چاہے حصول پر مشتمل ہوگی ایسی تھلی توانائی ج تا کر آئی فرا فرامری
جہاں عنصر فرا فرامری کا ارتقاء ہی ہے، اور فاصلہ سطحوں کی توانائیاں (ع)
تابع اور ہوا ہے، مانع اور ظرف (رجہ) ہوا اور ظرف کو مدد کرتی ہیں۔
پس یہ ضروری ہے کہ

ج تا کر آئی فرا فرامری + اس + ب + ج + س + م
ساکن ہو جہاں س + س + س + س سے ماتریت متطبیق (ع) (ج + ز + ج) (ا + ب)
ج سے اس کی توانائیاں کی اضافی رہے بقیر ہوتی ہیں، اس شرط کے تابع کہ
تھم کر آئی فرا فرامری مستقل رہتا ہے۔

تابع اور ہوا کی درمیانی سطح فاصلہ میں کے خفیہ ساؤ کی صورت میں اگر سطح
سب کے ہوا کے عنصر کو صاف معنی کرے جو س کے قدیم اور مدد محلوں میں
اسکے متناظر عناصر کے درمیان واقع ہے تو پہلی رقم کا نتیجہ ج تا کر آئی صاف فرامری
ہوگا۔

اولاً فرض کر کہ مانع جس خطیر ظرف کو مس کرنا سے وہ نہیں بدلتا اس صورت
میں س + اور س + مستقل رہیں گے اور س + ب بکر س + ہو جائے گا۔ س کے
ایک ایسے عنصر فرامری فرامری پر فوراً جو خطوط انحصار سے محدود ہے۔ اس عنصر کے

لہ یہ ممکن ہے کہ کثات سطح کے لائنہاں دیکھ سالی عمل کی وجہ سے بدلتی ہو لیکن چونکہ
متغیر کثات کی دکن مولائی بمقابلہ صاف کے لائنہاں چھوٹی ہوگی اس لئے استدلال کو متاثر
کئے بغیر اس تغیر کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

حدود میں سے گزرنے والے عماد سطح سے کو غصہ قرس، فرس، میں قطع کرینگے اور اگر سہ، سہ، صدری نصف قطر اخٹا ہوں تو

$$\text{فرس} = (1 - \frac{\text{مفع} }{\text{سہ}}) \text{فرس} , \text{فرس} = (1 - \frac{\text{مفع} }{\text{سہ}}) \text{فرس}$$

$$(128) \quad \text{فرس} - \text{فرس} = \text{فرس} - \text{فرس} = \text{فرس} - \text{فرس} = (1 - \frac{1}{\text{سہ}} + \frac{1}{\text{سہ}}) \text{فرس} - \text{فرس}$$

$$\text{مفع فرس} = (1 - \frac{1}{\text{سہ}} + \frac{1}{\text{سہ}}) \text{مفع} \times \text{فرس}$$

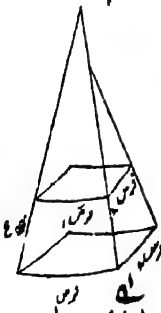
لیکن ہمیں مطلوب ہے

$$\text{ج ث لری مفع فرس} + \text{مفع لری فرس} =$$

$$\text{یا کہ لری لری مفع فرس} = (1 - \frac{1}{\text{سہ}} + \frac{1}{\text{سہ}}) \text{مفع فرس} =$$

اس مسئلہ کو تحت کے حجم مستقل رہتا ہے یعنی لری مفع فرس = پس

$$\text{لری لری مفع فرس} = (1 - \frac{1}{\text{سہ}} + \frac{1}{\text{سہ}}) \text{مفع فرس} =$$



جہاں ن مستقل اور مفع اختیاری ہے

$$\text{ج ث لری مفع فرس} = (1 - \frac{1}{\text{سہ}} + \frac{1}{\text{سہ}}) \text{مفع فرس}$$

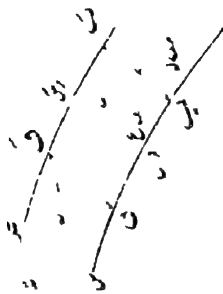
$$\text{ج ث لری مفع فرس} = (1 - \frac{1}{\text{سہ}} + \frac{1}{\text{سہ}}) \text{مفع فرس}$$

$$\text{یعنی} \quad \text{ج ث لری مفع فرس} = (1 - \frac{1}{\text{سہ}} + \frac{1}{\text{سہ}}) \text{مفع فرس}$$

۱۰ مستقل کا ۱۱ کے مساوی ہونا اس طرح ظاہر ہے کہ اگر سطحی وزانی لا صفر ہوتی تو تابع کے اندر کا داؤ داخل اور ہوا کی سطح فاصل کے نزدیک کرہ ہوائی کے داؤ کے مساوی ہوتا۔

جہاں کرہ ہوائی کا دباؤ π اور سطح کی سطح کے عین اندر کا دباؤ دے اس سے معلوم ہوا کہ اثر وہی ہے گویا سطح تناؤ کی حالت میں ہے اس طور پر کہ کسی نقطہ پر کا تناؤ مستقل اور توانائی کی اکائی رقبہ کے مساوی ہے۔

نہ اس قدر کہ سطح اور طرف کا سطح تماس سے سے تک ہر جگہ ہے۔ اگر ہم خط سے کے تمام نقطوں



بر سطح سے کے عماد کھینچیں تو یہ

عماد سطح سے کو خط ثمرہ پر قطع کرینے

اور سطح سے دو حصوں پر متقل خیال

کیجا سکے گی۔ ایک ص ص خط ث

سے محدود ہے اور دوسرا ص ص خط ث

اور سے کے در بیان ہے۔

گذشتہ کی طرح میں حاصل ہوگا

$$\text{ص} - \text{س} = \left(\frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}} \right) \text{مفع فرس}$$

(۱۶۹) اور اگر مفع ل سے عناصر فرس، فرس کا درمیانی ماحصلہ تقسیم ہو تو ص ص کو سطح سے پر طرف کی سطح کے عناصر مفع ل فرس کا ظل تصور کیا جاسکتا ہے پس اگر سطح سے اور سطح سے کے عمادوں کا درمیانی زاویہ آہو

$$\text{ص} = \text{جہم آ مفع ل فرس}$$

$$\text{فرس مفع ل} = \text{مفع ل} = \text{مفع ل فرس}$$

اب چونکہ توانائی بالقوہ ساکن ہے اس لئے

$$\text{مفع ل} = \left(\frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}} \right) \text{فرس} + \text{س} + \text{س} = 0$$

اس شرط کے ماتحت کہ کیت مستقل ہے۔ یا

ج ف ک اری ص ع فرس + (ص ص - س) + ب ب ف س + ج ب ف س =
یا ک ا ر ا ج ف ی - (ا ر + ا ر) + ب ف ع فرس + (ا ج م آ + ب ج) ب ف ع فرس =
اس شرط کے تحت کہ

ا ک ا ب ف ع فرس =

اور چونکہ یہ اختیاری ہے اس سے مساوات (۱) حسب سابق حاصل ہوگی اور نیز

ا ج م آ + ب - ج = (۲)

حاصل ہوگا جس کا یہ مطلب ہے کہ دائرے اور طرف کی سطحوں کا درمیانی زاویہ ان کے
خط تقاطع پر مستقل رہتا ہے۔

۱۶۵۔ مذکورہ بالا باتوں پر غور کرنے سے نیز تجربوں کے نتیجوں کی بنیاد پر دو کلیوں
پر پہنچتے ہیں جن کو اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے۔

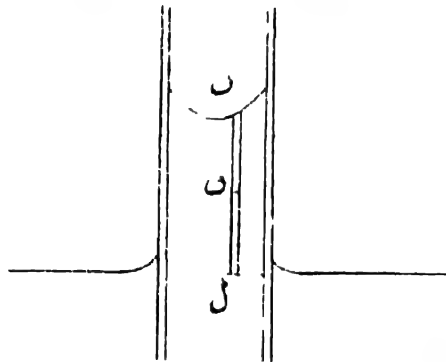
(۱) اس محذور کے ذیلی سطح پر (ج یا ع اور ا کو جدا کرتی سطح) یا دو مائلات
کے درمیان کی سطح خاص پر سطحی تناؤ ہوتا ہے جو ہر نقطہ پر اور ہر سمت میں وہی ہوتا ہے
(۲) گیس اور مائع کی سطح فاصل یا دو مائلات کی سطح فاصل ٹھوس جسم کے جس
خط پر ملتی ہے اس خط انتقال پر اس سطح اور جسم کی سطح کے درمیان ایک خاص زاویہ
بنے گا جو ٹھوس اور مائلات کی نوعیت پر منحصر ہوگا۔

پانی اگر شیشے کے برتن میں ہو تو یہ زاویہ حادہ ہوتا ہے۔ پارہ کی صورت
میں یہ زاویہ منفرجہ ہوتا ہے۔ (۱۵)

لہٰذا شکل میں جو مائل اور طرف کا خط اس ہے اس کا عنصر فرس مائل ہے اور خط مائل اس کے
مستطیل عنصر مائل کی قیاسی سطح ص کا عنصر مائل کی قیاسی ہے کیت کا تغیر مائل اور طرف کے
خط مائل کے اطراف فائدہ مائل مائل کی قیاسی سے تعبیر ہوتا ہے بمقابلہ باقی کیت۔ لہٰذا اصل رائے
کی صغیر مقدار ہے اور اس لئے نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

ان کلیوں کو ان کرہم قوت شعری اور مانع جھیلوں سے متعلق مختلف مظاہر کی توجہ کر سکتے ہیں۔

۱۶۶۔ دو تختیوں کے درمیان مانع کا چڑھاؤ۔
اگر سطحی تناؤ ہو اور مستقل راویہ عہ ہو جس پر مانع کی سطح ہر ٹکھی سے ملتی ہے اور جس کو ہم قوت شعری کا راویہ کہیں گے اور دو سطحی جڑاؤں اور تختیوں کا درمیانی فاصلہ د ہو تو اکائی عرض کے مانع کے توازن پر حوز کرنے سے
۲ جم عہ = ج لٹ ف د
پس تختیوں کے درمیانی فاصلے کو گھٹانے سے مانع کا چڑھاؤ بڑھتا ہے۔



یہ مشاہدہ طلب ہے کہ کسی نقطہ ق پر کا دباؤ والی پر کے دباؤ سے بقدر
ج ث × ق ل کے کم ہے

اور $\pi = \text{ج ث} \times \text{ق ل}$

اب چونکہ π پر کرہ جوائی کا دباؤ ہر دنی سطح آب پر کے دباؤ کے تقابلاً مساوی ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ عنصر ق ل کے وزن کو اس کے اوپر کے حدود کے سطحی تناؤں کا حاصل تھا ہے ہوے ہے۔

۱۶۷۔ دائری نلی میں مانع کا چڑھاؤ۔

اس صورت میں مانع کے ستون کو وہ تناؤ تھا میگا جو ستون کے اوپر کے
حدود کے گرد ہے اور اس لئے اگر اندرونی نصف قطر ہو تو

$$۲۲ رت جم ع = ج ث ۲ ر ف$$

$$۲ ت جم ع = ج ث ر ف$$

یا

اس طور پر تھے ہوئے ستون کے کسی نقطہ پر کا دباؤ چونکہ کرہ ہوائی
کے دباؤ سے کم ہو گا اس لئے اگر ستون کافی طور پر بلند ہو تو یہ دباؤ تناؤ کی
حالت میں ضم ہو جائے گا مگر پھر بھی سیالی دباؤ کے اس کلیہ کی پابندی
کرے گا کہ ہر سمت میں دباؤ مساوی ہوتا ہے۔

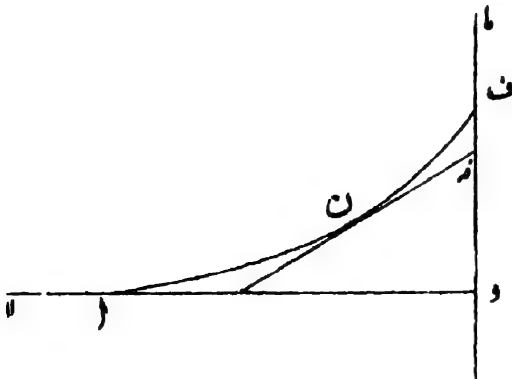
یہ مشاہدہ طلب ہے کہ توانائی باقوہ حوسنوں کے صعود کی وجہ سے پیدا ہوتی
ہے نصف قطر پر منحصر نہیں ہوتی۔

(۱۶۱)

۱۶۸۔ شعاری تختی۔ شعاری منحنی وہ شکل ہے جو مانع انتصابی دیوار کے ساتھ

تماس میں اختیار کرتا ہے۔

ہم ایسی صورت پر غور کریں گے جس میں مانع اور دیوار کا زاویہ تماس حادہ
ہو مثلاً جب پانی سطحِ سطح کی ایک انتصابی تختی کے ساتھ تماس رکھتا ہے۔



اگر انتصابی دیوار و ف ہو مانع کی مدد قی سطح و ان میں سے گزرنے والی دیوار کے عمود وار تراشش کا نصف قطر انتہا اور سطح بننا و ت ہو تو دفعہ (۱۴۴) کی مساوات (۱) سے

$$\frac{ت}{ر} = ۵ - \pi = ج ث ما$$

س م ت = ج ث ک ۲ رکھے سے

$$\frac{۲}{م} = ک ر ما$$

اور دفعہ (۱۳۵) کی شکل کو انا دیے سے ہم دیکھتے ہیں کہ شعاری محبی لرنیہ کی ایک حاض صورت ہے۔

مناقص صورت اس لئے ہے کہ ولسخنی کا ماس ہے، پس مزا/مزا = ۰۔ جیکہ ما = ۰۔

اور اس طرح کارٹیری مساوات حاصل ہو سکتی ہے شکل سے ظاہر ہے کہ مزا/مزا = جزا/مزا (۱۴۴)

۲/۳ + ذکا ماس ہے منفی ہے اور بعد ازاں گھٹتا ہے اس لئے نتیجہ نکلتا ہے کہ مزا/مزا منفی ہے اور مساوات مزا/مزا = ک ۲ ہو جاتی ہے

$$\frac{مزا}{مزا} = \left[۱ + \left(\frac{مزا}{مزا} \right)^۲ \right]^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۲}{مزا}$$

مزا/مزا کی بجائے ع مزا/مزا رکھ کر مکمل کرنے سے [ع = مزا/مزا]

$$\frac{۱}{۴(۲۶+۱)} = \frac{۱}{۲} - ۱، اور \frac{مزا}{مزا} = \pm \frac{مزا}{مزا} = \frac{۲}{مزا} - ۱$$

اب جو کہ ماس انتصابی ہوتا ہے جبکہ ما/ما = ک اور چونکہ منحنی،

انتصابی مستوی کو حادہ راویہ پلٹتا ہے اس لئے تمام نقاط زیر بحث پر ما/ما، ک سے کم ہوگا اور

$$\therefore \frac{\text{فرلا} - ۲\text{ک}}{\text{فرلا} - ۲\text{ک} - ۲\text{ما}} = \frac{۲\text{ک}}{۲\text{ک} - ۲\text{ما}}$$

اس مساوات کے مکمل سے اور مبداء کو ایک نئے مقام پر لینے سے اس طرح پرکلا =۔ جبکہ ما = ک، حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{لا} + \text{ما} - ۲\text{ک}}{۱} = \frac{\text{ک} - \text{ک} + \text{ک} + \text{ما} - ۲\text{ک}}{۲}$$

$$\text{یا } \frac{\text{ک}}{۲} = \text{قطر} \left\{ \frac{\text{لا} + \text{ما} - ۲\text{ک}}{۲} \right\} \quad [\text{Sech} = \text{قطر}]$$

اگر ما =۔ فرلا، لائن ہی ہوتا ہے اور دفعہ (۱۳۵) کی شکل لینے سے لہذا شعاری منحنی کے مائل ہو جاتا ہے جبکہ ب ج، ب اور ج پر ماس ہو لیکن یہ اسی صورت میں ممکن ہے جبکہ طول بہت بڑا ہوا۔
اگر عمودہ زاویہ ہو جس پر مائع دیوار سے ملتا ہے تو ہم فرلا کی بجائے ممعدہ رکھنے سے ارتفاع و ف حاصل کر سکتے ہیں اس طرح

$$\frac{\text{ک}}{۲} - ۲\text{ک} = - \text{ممعدہ}$$

$$\therefore \text{و ف} = \text{ک جب } \left(\frac{\text{ق}}{۲} - \frac{\text{ع}}{۲} \right)$$

ایسے مائع کی صورت میں جس کے لئے زاویہ تماس منفرج ہو (مثلاً پارہ) یہ بہتر ہوگا کہ ما کو نیچے وارنا پاجاے۔

۱۶۶۔ ذاتی مساوات حاصل کرنے کے لئے قوس کو ف سے ناچو اور انصراف مذکور سے۔ تو

$$- \frac{\text{ک}}{۲\text{ر}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر}} = - \text{ر جم ف}$$

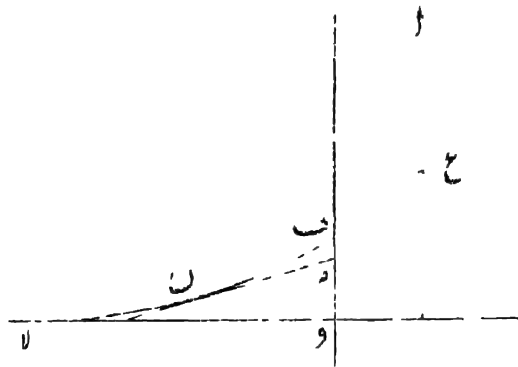
$$۱- \frac{ک^۲}{۲۸} = جب ف، \frac{مس}{فرقہ} = \frac{ک}{(\frac{۲}{۴} - \frac{\pi}{۴})}$$

$$اور \frac{۲}{ک} = \frac{ک}{(\frac{۲}{۴} - \frac{\pi}{۴})} \frac{مس}{(\frac{۲}{۴} - \frac{\pi}{۴})}$$

اگر فوس یہ اور اشرف سما کو بالریب ۱ اور ۱ پر کے ماس سے
ناپیں تو

$$جب ، ف = - \frac{\pi}{۴} ، س = - ف$$

$$اور جب ، ف = سما = \frac{۱۳}{۴} ، س = - ف (- ف)$$



اور حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۲}{ک} = \frac{ک}{(\frac{۲}{۴} + \frac{\pi}{۴})} مس$$

جو دہ (۱۳۵) میں حاصل کی ہوئی مساوات ہے۔

۱۷۰۔ متوازی تختیاں۔ ایک ہی شے سے بنی ہوئی دو متوازی تختیوں کے

درمیان الٹی سطح کی شکل جب تختیاں مائع میں جزو غرق ہوں۔

اس صورت میں محور و اما کو تختوں کے درمیانی فاصلے کے وسط میں اور مبداء و کو مانع کی قدرتی سطح میں لینا اور انصاف فہ کو اپر کے ماس سے اپنا سہولت پیدا کرے گا۔ (۱۰۴)

گذشتہ صورت کی طرح

$$ر = \frac{ک}{۳}$$

$$اور \quad \frac{فر۱}{فر۲} = \left\{ ۱ + \left(\frac{فر۱}{فر۲} \right)^۲ \right\}^{-\frac{۳}{۲}} = \frac{ک}{ر}$$

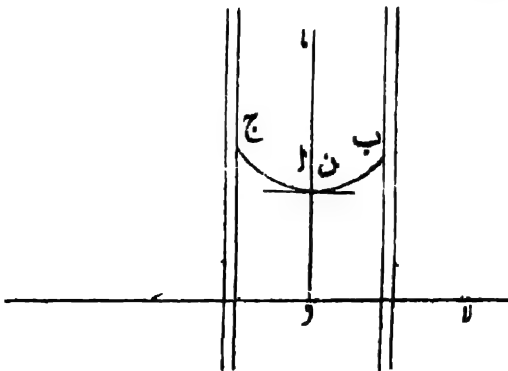
اس لئے حاصل ہوگا

$$\frac{ک}{ر} = \frac{فر۱}{فر۲} = \left\{ ۱ + \left(\frac{فر۱}{فر۲} \right)^۲ \right\}^{-\frac{۳}{۲}} = م - جم فہ جہاں مستقل ہے۔$$

اس طرح م - جم فہ مثبت ہونا چاہیئے اور اسلئے $م < ۱$

$$نیز \quad م = \frac{فرس}{فر فہ} = \frac{ک}{ر}$$

$$ن \quad \frac{ک}{ر} = \frac{فرس}{فر فہ} = \frac{۱}{م - جم فہ}$$



رکھو جم ف = ی اور مہا س / ک = ۶

فری.

$$\frac{\{ (1-y) (x-y) \}}{x^2} = 2 \text{ مر}$$

ی = و + و_۳ کے اندراج سے یہ ہو جاتا ہے

۱- فرز

$$\frac{-f_0}{(3/5+1+2)(3/5+1-2)(3/5-2)} = f_0$$

$$\frac{\text{فرو}}{\text{دوا (و-ع) (و-ع) (و-ع)}} \int = 6$$

جہاں $E_1 = 3/m_1$ ، $E_2 = 3/m_2$ ، $E_3 = 3/m_3$

اس طرح $E_1 < E_2 < E_3$

پس $9 = 6 + 3$ (جہاں 3 مستقل ہے۔)

ابی یاجم نہ، اور جب کہ درمیان واقع ہوتا ہے جہاں ع (۱۰۵) قوت شعری کا زاویہ ہے۔

۱- مرز و کجیب - م/م

۱! $\mu < \nu < \mu$

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ چونکہ فہم (ع + صہ) ع، اور ع، کے
درمیان واقع ہونا ہے اس لئے صہ کا خیالی حصہ، خیالی نصف دور سہم ہونا
چاہیئے۔ نیز د = ع، جیکہ فہ = یا ی = ا، اور اگر ہم ص کو ا سے
نہیں تو ع = حکم د = اور اس لئے لازماً

فہم صہ = ۲ع = فہم سم ، اور اس لئے

$$سم = سم = سم = سم = سم [سم = سم]$$

اور و = فہم (ع + سم)

$$نیز \frac{فرلا}{فرس} = جمف = و + \frac{1}{4}ع$$

$$\therefore \frac{۲۷}{۲۷} \frac{فرلا}{فرع} = فہم (ع + سم) + \frac{1}{4}ع$$

$$\therefore \frac{۲۷}{۲۷} لاکر + مستقل = طا (ع + سم) + \frac{1}{4}ع$$

اور لا = جبکہ ع = پس

$$\frac{۲۷}{۲۷} لاکر = \frac{1}{4}ع - طا (ع + سم) + طاسم \dots (۱)$$

$$نیز ۲ لاکر = م - ی = ع - و$$

$$یعنی ۲ لاکر = ع - فہم (ع + سم) \dots (۲)$$

حل کو مکمل کرنے کے لئے اگر تخمینوں کے درمیان فاصلہ ۱۲ ہو تو لا = ۱ کے جواب میں ع کی قیمت اس مساوات سے حاصل ہوگی

$$جب ع = ی = فہم (ع + سم) + م/۳$$

$$\text{اور چونکہ} \quad فہم (ع + سم) = \frac{(ع - ۲ع)(ع - ۲ع - ع)}{فہم - ع - ع}$$

$$\therefore \text{جب ع} = ۱ = \frac{(۱ - م) ۲}{فہم - ع - ۱ + م/۳}$$

لے طا = ع (Weierstrass' Zetafunction)

$$\text{یعنی فہد } ۶ = \frac{\text{مر (۵ + جب عد) } ۳ - (۱ + جب عد)}{۳ (۱ - جب عد)}$$

مزہ براں ہم یہ دیکھتے ہیں کہ ربط (۳) کی د. سے ربط (۲) اس شکل میں لکھا جاسکتا ہے

$$۲ \text{ تا } ۱ \text{ تک } ۲ = \text{مر} - (۱ - \frac{\text{فہد } ۶ - \text{عہد}}{\text{فہد } ۶ - \text{عہد}})$$

یہ کہ نقاط اور ب کے ارتفاع علی المرتبہ تا ۱ تک = مر - ۱

اور مر - جب عد سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۷۱ - دائری ٹلی - انتصابی دائری ٹلی کے اہ فی مان کی سطح کی

شکل کے لئے تفرقی مساوات حاصل کرنا جبکہ لمبائی میں جزء حرق ہو۔

۱۷۲ (۱۷۱) کی شکل کو سطح کی نصف النہاری تراشیں برابر ویسے سے قطعہ ۱۷۲ (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱}{ر} + \frac{۱}{ر} = \frac{\text{ج ثا}}{\text{ت}} = \frac{\text{مر}}{\text{ک}}$$

جہاں کہ ہوائی کا دباؤ مانع کی سطح کے سین زیر برج اع کے دباؤ سے بقدر ج ثا کے بڑا ہے۔

اب چونکہ ر = لاقم فہد ہیں مساوات

$$\frac{\text{مر}}{\text{ک}} = \frac{\frac{\text{فزا}}{\text{فلا}}}{\frac{۱}{۲} \left\{ ۲ \left(\frac{\text{فزا}}{\text{فلا}} \right) + ۱ \right\} \times \frac{۱}{لا} + \frac{۲}{۲ \left\{ ۲ \left(\frac{\text{فزا}}{\text{فلا}} \right) + ۱ \right\}}}$$

حاصل ہوتی ہے جو شکل

$$\frac{\text{مر}}{\text{ک}} = \frac{\frac{\text{فزا}}{\text{فلا}}}{\frac{۱}{۲} \left\{ ۲ \left(\frac{\text{فزا}}{\text{فلا}} \right) + ۱ \right\} \times \frac{۱}{لا} + \frac{۲}{۲ \left\{ ۲ \left(\frac{\text{فزا}}{\text{فلا}} \right) + ۱ \right\}}}$$

میں لکھی جاسکتی ہے۔

نیز اگر نلی کا اندرونی نصف قطر ρ ہو اور مائع نلی کی سطح کو جس حادہ زاویہ پر ملتا ہے وہ θ ہو تو

$$\frac{F}{A} = \frac{2\sigma \cos \theta}{r} \quad \text{جبکہ } \rho = r$$

اگر زاویہ تماس منفی ہو تو مائع نلی میں نیچے دبا ہوا ہوگا اور اگر ہم ماکو نیچے دار بنا دیں تو مائع کی سطح کے عین نیچے اس کا دباؤ گڑھ ہوائی کے دباؤ سے بقدر ج ث ماکے بڑا ہوگا۔

زیر بحث صورت چونکہ بارہما کے اندرونی پارہ کی آزاد سطح پر بھی مشتمل ہے اس لئے اس مضمون پر کافی بحث و تحقیق ہونی رہی ہے چنانچہ نصف النہاری منحنی کی تقریبی مساوات کا حل (Lohnstein) نے ایک سلسلہ کی شکل میں حاصل کیا جو مستحق رہتا ہے جب تک کہ منحنی کا ماس انتظامی نہیں ہو جاتا۔ (C. Rungt) نے تقریبی مساواتوں کو حل کرنے کے عددی طریقہ کے ضمن میں مثال کے طور پر اس مساوات پر غور کیا۔ لارڈ کیلون نے رسالہ (Nature) میں شماری معینوں کی تقریبی شکل دریافت کرنے کے ایک ہندسی طریقہ کی نشان دہی کی جس پر بالتفصیل (C. V. Boys) نے بحث کی۔ (K. Neumann) نے بھی معلوم کیا ہے۔

۱۷۲۔ مائع کا قطرہ۔ اگر مائع کا ایک قطرہ ایک افقی میز پر رکھ دیا جائے تو

Dissert Berlin, 1891

Math Annalen 40 (1895), p 167

Nature, July and August, 1886.

Phil Mag Series 5, Vol 36, p 75, 1898

Vorlesungen über die Theorie der Capillarität Leipzig 1894

۱

۲

۳

۴

۵

توازن کی مساوات ہوگی

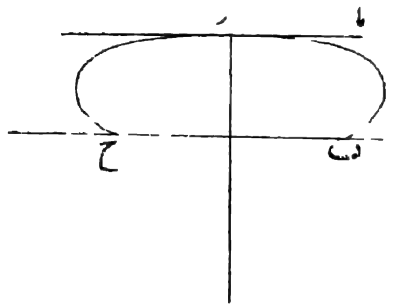
$$\frac{\text{ضنہ}}{\text{ت}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$$

جہاں سطحی متساوت ہے اور اندر نی دباؤ اور کرہ ہوائی کے دباؤ کے درمیان فرق ضنہ ہے۔

عام طور پر قطرہ ایک گردستی سطح کی شکل اختیار کرے گا۔
اس صورت کو لیکر فرض کرو کہ مائع کے اندر بلند ترین نقطہ پر دباؤ π ہے
اور کرہ ہوائی کا دباؤ π ہے۔ سب لاکو بلند ترین نقطہ سے نیچے وارنا ہے سے

$$\text{ضنہ} = \pi + \text{ح} - \text{لا}$$

$$\frac{\pi + \text{ح} - \text{لا}}{\text{ت}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$$



پس اگر بلند ترین نقطہ پر نصف قطر اخفا ہو تو

$$\frac{\pi - \pi}{\text{ت}} = \frac{2}{r}$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{لا}}{\text{ت}} + \frac{2}{r} = \frac{\text{ح} - \text{لا}}{\text{ت}} + \frac{2}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \quad (1)$$

اگر ہم شیشے پر پارہ کے قطرہ کی یا فولاد پر پانی کے قطرہ کی صورت لیں
تو مشاہدہ سے معلوم ہو گا کہ فرما/فرلا اس سے نیچے دار گھٹتا جاتا ہے

(۱۰۰)

اور نصف النہار ہی منحنی کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\frac{\frac{1}{2}}{r} + \frac{2}{r} = \frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{r}{r} + 1 \right)} + \frac{\frac{r}{2}}{\frac{1}{2} \left(\frac{r}{r} + 1 \right)}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{r} + \frac{2}{r} = \frac{1}{\frac{1}{2} (r + 1)} + \frac{r}{\frac{1}{2} (r + 1)}$$

$$\frac{r}{2} = r$$

پس اگر نصف النہار ہی منحنی کے کسی نقطہ پر ماس کا میلان محور لاکے
ساتھ نہ ہو تو $r = \text{مسافت}$ اور

$$\therefore \text{جم ف} \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{r}{2}$$

اگر قطرہ اتنا بڑا ہو کہ ہم اس کی جوتی کو چھٹا تصور کر سکیں اور اگر افقی
تراشوں کے انحناء کو نظر انداز کیا جائے تو مساوات (۱) ہو جائے گی

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{r}{\frac{1}{2} (r + 1)}$$

$$\text{اس طرح } \frac{1}{r} = \frac{r}{\frac{1}{2} (r + 1)} \Rightarrow 1 = \frac{r^2}{\frac{1}{2} (r + 1)} \Rightarrow \infty = \text{جبکہ } r = 0$$

$$\frac{r}{2} = \frac{r}{2} \Rightarrow \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$$

اس مساوات کا تکمیل کرنے کے لئے رکھو $r = 2$ جب ط

اس طرح فرما = ک (فہم طہ - ۲ جب طہ) فوطہ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$

$$1. \quad \sqrt{a^2 - 2ab + b^2} + \frac{\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} - a}{b} = \frac{a - b}{b}$$

جہاں بے مستقر ہے۔

جہاں بے منتقل ہے۔
اُس نقطہ پر جہاں ماس انضمامی ہے ع۔ = اور

$$K = 1 \quad \therefore$$

اگر نصف النہاری منحنی اور افقی مستوی کے درمیان حادہ زاویہ ϕ ہو

یعنی یارہ سستی کو جس زاویہ پر ملتا ہے وہ π - عدد ہو اور اگر قطرہ کا ارتفاع ۱۷۹ ف ہو تو

$$f = -\left(\frac{q}{r} - e\right) \text{ جبکہ } l = f$$

اور \therefore ف = ۲ ک جم $\frac{۷}{۲}$ عم

۱۷۳۔ متوازی تختیوں کے درمیان قطرہ - اگر بارہ کا ایک قطرہ

شیشے کی دو متوازی افقی تختوں کے درمیان رکھ دیا جائے جو ایک

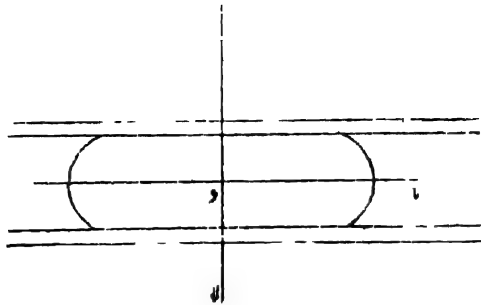
دوسرے سے اس قدر نزدیک ہیں کہ جاذبہ ارض کا عمل نظر انداز

کیا جاسکتا ہے تو قطرہ کے اندہ دباؤ مستقل ہوگا اور اگر سطح گردشی سطح

ہو تو ہمیں مساوات

$$\frac{\text{ضد}}{\text{ت}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$$

حاصل ہوگی جہاں اندرونی دباؤ کا اضافہ کرہ ہوائی کے دباؤ پر صدمہ ہے۔



اس صورت میں لا کو اس مستوی سے نیچے وارنا پنا مناسب ہوگا
جو کمبوں کی دونوں سطحوں کے وسط میں واقع ہے اور تب ہمیں مساوات

$$-\frac{e}{2} = \frac{1}{\frac{1}{2}(e+1)} + \frac{1}{\frac{1}{2}(e+1)} \quad \text{--- (فرض کرو)}$$

حاصل ہوگی۔
تکمل کرنے سے اور $a = l$ ، جبکہ $a = 0$ ۔ یعنی سے

$$\frac{b}{2} = a + l - b - l$$

$$\frac{a + l - b - l}{\frac{1}{2}(a + l - b - l)} = \frac{a + l - b - l}{\frac{1}{2}(a + l - b - l)} \quad \text{اس طرح}$$

۱۸۰ رکھو $a = y$ تو

$$\frac{(y + l - b - l)}{\frac{1}{2}(y + l - b - l)} = \frac{(y + l - b - l)}{\frac{1}{2}(y + l - b - l)} \quad \text{فرلا}$$

اگر ہم لکھیں $y = 0$ تو حاصل ہوگا

پس فلا = {فہ (۶ + سم) + ۱/۲ (ب + ل - ل')} فرع

اور تکمل سے لا + مستقل = طا (۶ + سم) + ۱/۲ (ب + ل - ل')

لیکن ۰ = جبکہ ی = ل'

یا جبکہ ۰ = - ۱/۲ ل' + ۱/۲ (ل - ب) = ع = فہ (سم)

اس طرح لا کی اس قیمت کے لئے ۶ کو صفر ہونا چاہیئے۔

۰ : لا = طا (۶ + سم) - طا (سم) + ۱/۲ (ب + ل - ل')

اور ۰ = فہ (۶ + سم) + ۱/۲ (ل' - ل' - ل' - ب + ب)

سے کارٹیزی محدود کی قیمتیں مبدل ۶ کی رقوم میں حاصل ہوتی ہیں۔

اگر قطرہ اس قدر بڑا ہو کہ ہم ۱/۲ کو نظر انداز کر سکیں تو ر = ۱/۲

اس طرح نصف انہاری مخنی دائرہ ہوگا۔

اس صورت میں اگر تختیوں کے درمیان فاصلہ ۲ ف ہو تو شکل سے ظاہر ہے کہ

ر = ف قطع

جہاں ۶ وہ حادہ زاویہ ہے جو پارہ اور ہر تختی کی سطح کے درمیان باہر کی طرف بتا ہے۔

۴۱۔ اگر تختیوں کی دو متوازی افقی تختیوں کے درمیان پانی کا ایک

(Antielastic)

قطرہ گردش کی شکل اختیار کرے تو سطح ضد انحنائی

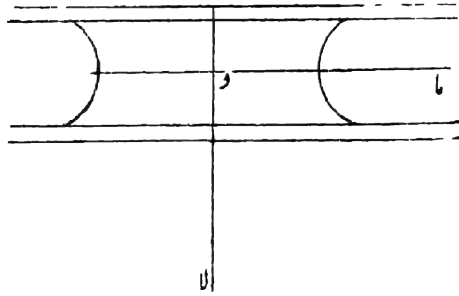
ہوگی کیونکہ پانی اور تختی کے زاویہ تماس حادہ ہے۔

اس صورت میں اگر کہ ہوائی کا دباؤ II اور قطرہ کے اندر پانی کا دباؤ

۱۱ ہو اور اگر نصف النہار ہی منحنی کا نصف قطر انجماد ہو اور پہلی القوائم عمادی تراش کا نصف قطر انجماد ہی عماد کا وہ طول جو سطح کے محور سے قطع ہوتا ہے تو توارن کی مساوات ہوگی

$$\frac{\text{صند}}{\text{ت}} = \frac{\pi - \pi}{\pi} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$$

کوئکہ اگر ہم عماد کی سمت میں قوتوں کو متخلیل کر بس نو نزاؤں کا حاصل سمت میں باہر کی طرف ہوگا اور دوسرے دو تئوں کا حاصل اندر کی طرف -



حسب سابق لاگو تختیوں کے درمیان وسطی سطح سے نیچے دارنا بننے سے مساوات بالا ہو جائے گی

$$\frac{\text{ع فرغ}}{\text{فرغ}} = \frac{1}{\frac{1}{r} (2e + 1)} - \frac{\text{صند}}{\text{ت}} = \frac{2}{b} \quad \text{فرض کرد}$$

جس سے مساوات

$$\frac{b}{r(2e + 1)} = l + l - a$$

حاصل ہوگی اور اس سے گذشتہ دفعہ کی طح ہم احذر کر سکتے ہیں

لا = طا (سم) - طا (ع + سم) + $\frac{1}{2}$ (ع - سم) (ل + ل ب - ب)

اور ما = فھ (ع + سم) + $\frac{1}{2}$ (ل + ل ب + ب) (ب)

بڑے قطرے کے لئے حسب سابق

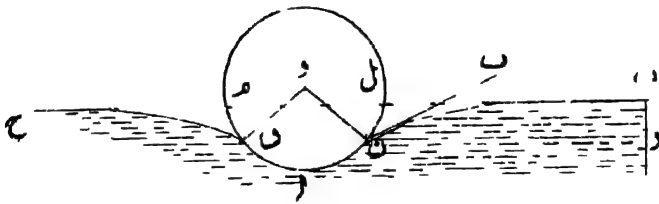
ر = ف قطع

جہاں پانی کی سطح اور ہر تختی کی سطح کے درمیان عادیہ زاویہ عم ہے۔

۱۷۵۔ تیرنے والی سوئی۔ پانی کی سطح پر سوئی کے تیرانے کے مشہور

تجربہ کی توجیہ سطح کے قوانین کے ذریعہ ہو سکتی ہے۔

منکل سوئی کی تراش کو اور اس کے محور کے علی القوائم پانی کی سطح کی تراش کو تعبیر کرتی ہے سوئی پر عمل کرنے والی قوتیں ہیں ن اور ف پر کے تناؤ اور حصہ ن اف پر پانی کا دباؤ جو پانی کے حجم ن ل ف کے وزن کے مساوی ہے۔ یہ سب قوتیں سوئی کے وزن کو تھامتی ہیں۔



مزید براں ن پر کے تناؤ کا افقی جزو تحلیل اور ب د پر کا افقی آبی دباؤ مرکب

پر کے تناؤ کے مساوی ہیں جہاں ن د افقی اور ب د انتصابی ہے۔

ان شرائط سے توازن کی تعین ہوتی ہے اور حسب ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

۲ ت جب (ط - ع) + ج ث ک (ک ط + ک جب ط جم ط - ۲ ف جب ط) = و

۴ ت جب ۲ (ط - ع) = ج ت (ک جم ط - ف) ۲

جہاں قوت شری کا زاویہ عدسوی کے اکائی طول کا وزن و، یا نی کی قدرتی سطح کے اوپر سوئی کے محور کا ارتفاع ف اور رادیان وق ۲ ہے۔

۴۶۔ مانع کی جہلیاں۔ مانع کی جہلیاں مختلف طریقوں سے پیدا کی جاتی ہیں۔ صابونی بلبلہ ایک عام مثال ہے۔ صاف شیشے کی بوتل کو جس میں کچھ لزج مانع ہو لانے سے یا صابون اور پانی یا صابون اور گلیسرین کے محلول میں نار کا آب فریم ڈبو کر اس کو جلد رنج باہر نکال لینے سے مانع کی جہلیاں پیدا کی جاسکتی ہیں اور ان کی خصوصیات کا مشاہدہ کیا جاسکتا ہے۔

جھیلوں کا ظاہر استومی کی شکل میں حاصل ہوا اس بات کی دلیل ہے کہ جاوہ ارض کا عمل بمقابلہ جلی کے تنازعے نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

یہ دیکھنے میں آتا ہے کہ بہت چھوٹے ماسی عمل سے بھی جھلی بھٹ جاتی ہے جس سے یہ متنبط ہوتا ہے کہ اس کے کسی خط پر کا ردور کل اس خط سے کہ مادی موت میں ہوتا ہے اس سے دفعہ (۱۴۹) کی طرح یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ تنازعہ ہر سمت میں ہی ہوتا ہے۔

۴۷۔ مستوی جلی کی توانائی۔ لزج مانع کے اندر سے اگر ایک مستوی ہسل

نکال لی جائے تو کچھ کام کیا جاتا ہے۔ یہ کام جلی کی توانائی بالقوہ کو تعبیر کرتا ہے۔

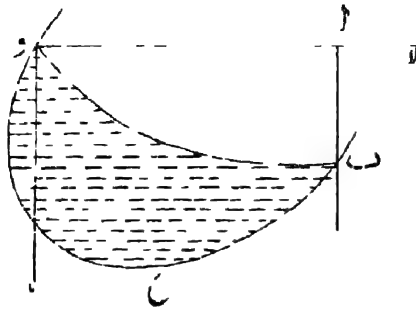
ایک مستطیل جلی اب ج د کا تصور کرو جو سیدھے تاروں ا د ب ج سے محدود ہے۔ اب مانع کی سطح میں ہے اور ج د حرکت پذیر ہے۔

جلی کو باہر نکال لینے میں جو کام ہوگا وہ ت د اب د کے مادی ہوگا اور اس لئے اگر سطحی توانائی فی ایکائی رقبہ میں ہو تو یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

س = ت

یہ یاد رہے کہ جس چیز کو ہم نے یہاں جلی کا متنازعہ کہا ہے وہ جلی کے

اس کو آسانی مکمل کر سکتے ہیں۔



بہ مساوات مستطیوں کی حاصل قیمتوں کے لئے دائرہ بازیمبرہ کو بقیبر کر سکتی ہے۔
۱۷۹۔ تاگے کے ایک معصر کے تواریں پر غور کرنے سے بھی اس سوال کو حل کیا جاسکتا ہے۔

و سے دوس کو ناپ کر فرض کرو کہ ن پر کے ماس کا میلان و ا لے ساتھ ہے۔

ب اگر ن پر تاگے کا تناؤ ت اور جہلی کا تناؤ نہ ہو مساواتیں
مف ت + و مف س × جب د = ۰

$$\frac{\text{ب مف ت}}{\text{ب مف س}} = \frac{\text{ت مف س} + \text{و مف س} \times \text{جم ذ}}{\text{ب مف س}}$$

حاصل ہوئی ہیں جہاں نقطہ ن پر تاگے کا نصف قطر انحناء ہے۔

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرما}} = - \text{و} \quad \text{ت} = \text{و} (۱ - \text{ا})$$

$$\frac{\text{ع فرع}}{\text{فرما}} = \frac{\text{ا}}{\text{فرما}} \left(\frac{\text{و}}{\frac{1}{2}(۲۴+۱)} + \text{ا} \right) = \frac{۱}{\frac{1}{2}(۲۴+۱)} \quad \text{اور}$$

$$\frac{\text{ت}}{\text{و}} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}(۲۴+۱) - \frac{۱}{۲}(۲۴+۱) \frac{\text{فرع}}{\text{فرما}} (۱ - \text{ا})$$

$$\text{پس } \frac{1}{14+1} = \frac{1}{15} + \frac{1}{14}$$

یہی شکل دفعہ ماضی میں حاصل کی گئی ہے۔

اگر ہم یہ مان لیں کہ $\frac{1}{14} = \frac{1}{15} + \frac{1}{14}$ اور نہ $\frac{1}{15} = \frac{1}{14} + \frac{1}{15}$ جبکہ $\frac{1}{14} = \frac{1}{15} + \frac{1}{14}$ م
تو ہر مساوات کے دو نامعلوم مستقلوں کی تعین ہو جاتی ہے اور چونکہ
 $\frac{1}{14} = \frac{1}{15} + \frac{1}{14}$ میں اس لئے ہر مساوات سے $\frac{1}{14}$ کی قیمت ماضی کے $\frac{1}{14}$ میں وہی حاصل
ہوتی ہے۔

۱۸۰۔ صابون کے کروی بلبے کی توانائی۔ صابون کے بلبے کی

توانائی وہ کام ہے جو اس کو پیدا کرنے میں ہوا۔ یہ کام وہ حصوں پر مشتمل ہوگا
ایک تو وہ کام جو جہلی کو لٹے سے کھینچ لینے میں ہوا اور دوسرے وہ کام جو بلبے کے
اندرونی ہوا کو بچکانے میں ہوا۔

اگر سطحی تناؤ σ ہو تو اول الذکر حصہ σ میں ہوگا (جہاں سطح کو σ
تعبیر کرتا ہے) کیونکہ ایک جھوٹے مستوی عنصر کی توانائی σ میں ہے۔
دوسرے حصے کے لئے فرض کر دو کہ اندرونی ہوا کا دباؤ p ہے جب

نصف قطر r اور σ ہوائی کا دباؤ p ہے تو $\sigma - p = \frac{2}{r}$ اور اگر ہوا کی

کیست اتنی ہو کہ اس کا حجم دباؤ p پر σ ہوتا ہے تو

$$\sigma - p = \frac{2}{r} \quad \text{یا} \quad \sigma - p = \frac{2}{r} \quad (\text{فرض کرو})$$

اور دفعہ (۱۴) سے، ہوا کو حجم σ سے حجم σ میں بچکانے میں جو کام ہوتا ہے

$$\sigma - p = \frac{2}{r} \quad \text{یا} \quad \sigma - p = \frac{2}{r} \quad (\text{فرض کرو})$$

$$\sigma - p = \frac{2}{r} \quad \text{یا} \quad \sigma - p = \frac{2}{r} \quad (\text{فرض کرو})$$

اگر ہم یہ مان لیں کہ لمبے کے اندرونی دہرونی دباؤں کا فرق بمقابلہ کرہ ہوائی کے دباؤ کے جیوا ہے تو $\frac{2}{\pi} \times$ کو ہم چھوٹا ذص کر سکتے ہیں اور اسلئے آخری جملہ سو جاتا ہے

$$\left\{ \frac{2}{\pi} + \pi \right\} \left(\frac{2}{\pi} - \left(\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \right) \right) = \frac{2}{\pi}$$

$$\frac{2}{\pi} \times \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} \times \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

پس ہوا کو یکساں کرنے میں جو کام ہوا وہ اس کام کے ساتھ $2 \times \pi$ کی نسبت رکھیں گے جو جلی کو باہر پھینچنے کے لئے میں ہوا۔

۱۸۱۔ مائع کی جلیوں کی شکلیں۔ اگر جلی کے دونوں رتنوں پر ہوا کا دباؤ وہی ہو تو توازن کی شرط یہ ہوگی کہ

$$0 = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$$

یا یہ کہ اوسط انحناء صفر ہے۔

(Catenoid) اور (Helicoid)

۲۔ سطرہ بنیہ نما (Catenoid) اور مکرعول نما (Helicoid) کی صورتوں میں پوری ہوتی ہے جو اس لئے مائع کی جلیوں کی ممکنہ اشکال ہیں۔ کارٹیزی محمد دوں میں یہ مساوات دفعہ (۱۲۵) کے بموجب ہو جائیگی

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) \left(\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \times \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

بڑے بڑے علماء ریاضی نے متعدد مقالوں میں اس مساوات پر بحث کی ہے چنانچہ اس مساوات کے چند مشہور خاص حل حاصل ہو چکے ہیں۔ مثلاً

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r} \text{ اور } \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \text{ جنہر لا جنہر لا}$$

جن میں سے ہر ایک ایسی سطح ہے جس کا اوسط انحناء صفر ہے۔
پلاٹو (plateau) کی تصنیف

Sur les liquides soumis aux seules forces moléculaires, 1873

میں علمایا صنی نے اس مضمون پر جو محنتیں کی ہیں ان کا شاندار تذکرہ کیا گیا ہے اور اس نے خود اپنے تجربات بھی اس کتاب میں درج کئے ہیں۔ ڈاربو

Theorie Generale des surfaces کی کتاب Darbou

minima Surfaces کے حصہ اول باب سوم میں قائل سطحوں

کی پوری تفصیل موجود ہے یعنی ایسے سطحوں کی جو متذکرہ بالا شرط کو پوری کرتی ہیں۔

۱۸۲۔ اگر چلی کی شکل گردشی سطح کی ہو تو سطح کے محور کو محوری قرار دینے سے

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 = f(y)$$

اس صورت میں اوسط انحناء کے صفر ہونے کی شرط سے حاصل ہوگا

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_2^2} = 0$$

$$r^2 = \frac{r_1^2}{1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \quad \text{اور} \quad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = 0$$

فرض کر کہ $\frac{y}{x} = \frac{u}{v}$ تو

$r = \frac{1}{2} (u^2 + v^2)$ بس سے ظاہر ہے کہ گردشی سطح کی شکل کی جہلی کی ممکنہ شکل صرف زنجیرہ بنا ہے جبکہ دونوں رتوں پر دباؤ دہی ہو۔

۱۸۳۴۔ اصول توانائی کی مد سے بھی یہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے کیونکہ سطح

کر ۲۲ مافرس

اس صورت میں اعظم یا اقل ہوگی اور احصائے تغیرات کی مد سے اس سے جو نکوینی معنی حاصل ہوگا وہ ایک زنجیرہ ہوگا جس کا مرتبہ گردش کا محور ہوگا۔
(Researches in the Calculus of Variations)

میں یہ بتایا گیا ہے کہ جب ایک خط تقیم اور دو سطحیں ایک ہی سمتی ہوں دئے جائیں تو ہمیشہ ایسے زنجیرہ کا کھینچنا ممکن نہیں جو ان نقاط میں سے گذرے اور جس کا مرتبہ یہ خط تقیم ہو۔

یہ بھی دکھایا گیا ہے کہ چند شرائط کے تحت ایسے دو زنجیرے کھینچے جاسکتے ہیں اور یہ کہ ایک خاص صورت میں صرف ایک زنجیرہ ایسا کھینچا جاسکتا ہے۔ یہ دونوں زنجیرے جب موجود ہوں تو ایسی شکل کا جواب ہوتے ہیں جو ایک بند (بے سرا) ڈوری کو دو چکنی کھونٹیوں پر لٹکانے سے پیدا ہوتی ہے۔

جب اس قسم کے دو زنجیرے ہوں تو اوپر کے زنجیرہ کو مرتبہ کے گرد گھمانے سے جو سطح پیدا ہوتی ہے وہ اقل ہوتی ہے لیکن نچلے زنجیرے کو گھمانے سے جس سطح کی تکوین ہوتی ہے وہ اقل نہیں ہوتی۔ جب صرف ایک زنجیرہ ہو تو سطح اقل نہیں ہوتی۔

پس اگر دو دائری تاروں سے ایک ایسا فریم بنایا جائے کہ ان تاروں کے سمتی ایک دوسرے کے متوازی اور ان کے مرکوزوں کو ملانے والے

خط پر عمود وار ہوں تو تاروں کو مانع کی جہلی سے ملانا ہمیشہ ممکن نہیں۔ بعض صورتوں میں دو میں سے ایک زنجیرہ نما سے تاروں کو ملانا ممکن ہے لیکن اوپر کے زنجیرہ کو نگھانے سے جو زنجیرہ نما پیدا ہوتا ہے اُس کی صورت میں توازن قائم ہوگا اور دوسرے زنجیرہ نما کی صورت میں غیر قائم۔ (۱۸۸)

جب صرف ایک زنجیرہ نما ہو تو توازن غیر قائم ہوگا۔ اس مسئلہ کا ایک غیر مسلسل حل بھی ہے جس میں دو دائروں کو ان نقطوں کے معینوں کو نگھانے سے حاصل کیا جاتا ہے اور ان کے مرکز ایک لا انتہا سبک اسطوانے سے ملائے جاتے ہیں۔

انسائیکلو پیڈیا بریٹانیکا (Britanica)

میں کلرک میکسویل Clerk Maxwell نے وقت شعری پر

ایک مضمون میں اس مسئلہ پر اس طرح روشنی ڈالی ہے۔ جب دو زنجیرے جن کا مرتب وہی ہو دو دئے ہوئے نقطوں میں سے کھینچے جاسکیں اور مرتب کے گرد ان کو نگھانے سے دو زنجیرہ نما حاصل کئے جائیں تو ہر زنجیرہ نما کا اوسط انحناء صفر ہوتا ہے۔

اگر ان دو زنجیروں کے درمیان ایک دوسرا زنجیرہ انہی نقطوں میں سے گدزنا ہوا کھینچا جائے تو اس کا مرتب اُن دونوں کے مرتب کے اوپر ہوگا اور اسلئے کسی نقطہ پر اس کا نصف قطر انحناء اُس فاصلے سے کم ہوگا جو عماد کی سمت میں اس نقطہ اور پہلے مرتب کے درمیان ہے۔

اس لئے گردشیں سطح کا اوسط انحناء محوری طرّف محب ہوگا اور یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ان میں سے کسی زنجیرہ نما کو دونوں زنجیرہ نماؤں کے درمیان کے کسی زنجیرہ نما پر ہٹا دیا جائے تو جہلی محور سے ہٹ جائیگی۔

پھر اگر ایک زنجیرہ نما دونوں زنجیرہ نماؤں کے باہر لیا جائے تو اس کا اوسط انحناء محور کی طرف متعرج ہوگا اور اس لئے اگر اوپر کا زنجیرہ نما اوپر وار ہٹایا

۱۸ انسائیکلو پیڈیا کی گیارہویں اشاعت میں لارڈ ریابے نے اس مضمون کی نظر ثانی کی ہے۔

جائے اور نیچے وار تو ہر صورت میں جبلی ہو کہ طوف حرکت کر گئی۔
 پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ہر دینی جانب کا ذخیرہ ماقائم ہے اور اندرونی
 حاف کا غیر قائم۔
 یہ استدلال کسی دوسری طرح کے ہٹاؤ برصاق نہیں آتا اور اس لئے
 قاضیت کے مکمل ثبوت کے لئے احصائے تغیرات کے طریقوں سے مدد لیا
 ضروری ہے۔
 ۱۸۴۔ اگر جبلی کے دونوں جانب دباؤ مختلف ہوں اور ان کا فرق ۷ ہو تو
 توازن کی شرط ہوگی

$$\frac{D}{T} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$$

یاد رکھو کہ اوسط انجم مستقل ہوگا۔
 گردشیں سطحوں کی صورت میں اس ربط کو ثابت کرنے کے لئے ہم
 (۱۸۹) اصول توانائی کا استعمال کریں گے۔
 ۷ کا مستقل ہونا اس طرح بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ سرے بند کر دئے
 گئے ہیں اور اندرونی ہوا کا حجم مستقل ہے۔
 اس طرح جلد

$$K(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$$

کا تغیر صفر ہوگا۔

جس سے پتہ چلتا ہے کہ

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \quad \text{اور} \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r'}$$

پس اگر ن گ عماد ہو تو

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \quad \text{کیونکہ} \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r'}$$

بوجب اس کے کہ منحنی محور لاکہ طرف محذب یا مقعر ہے، یعنی اوسط انحنا مستقل ہے۔ عام صورت میں ہمیں یہ شرط بیان کرنی پڑیگی کہ دئے ہوئے حجم کے لئے سطح اعظم سے باقی اقل اس سے وہی عام نتیجہ مستنبط ہوگا۔

۱۸۵۔ اگر جہلی گردشی سطح کی شکل کی ہو تو ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ نصف النہاری منحنی ایک ایسی مخروطی کے مانند کا طریق ہوتا ہے جو ایک خط مستقیم پر لڑک رہی ہو۔ اگر مخروطی کا نصف قطر انحنا اور اس کے طریق کا نصف قطر انحنا ہو تو

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{s \cdot n} - \frac{r \cdot m \cdot s \cdot n \cdot g}{s \cdot n^2} \quad (\text{شکل دیکھو اگلے صفحہ پر})$$

$$\frac{1}{s \cdot n} - \frac{1}{n \cdot l \cdot s \cdot n} = \frac{n \cdot g}{s \cdot n}$$

$$\frac{1}{s \cdot n} - \frac{n \cdot l}{s \cdot m \cdot a}$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s \cdot n} = \frac{1}{s \cdot n} - \frac{n \cdot l}{s \cdot m \cdot a}$$

مکانی کی صورت میں یہ صفر ہو جاتا ہے اور اسلئے $r = - s \cdot n$ ۔

$$(19) \quad \frac{1}{s \cdot n} = \frac{1}{s \cdot m \cdot a} - \frac{b \cdot j}{s \cdot n \cdot h \cdot n}$$

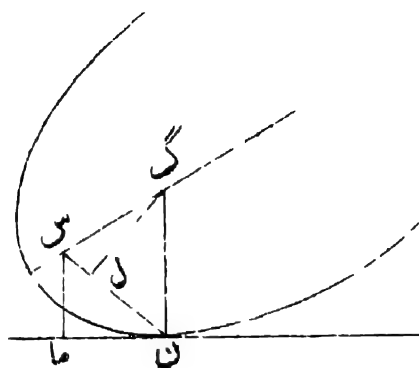
جہاں h دوسرا اسکہ ہے اور اس لئے $\frac{1}{r} + \frac{1}{s \cdot n} = \frac{1}{a \cdot j}$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s \cdot n} = \frac{1}{a \cdot j}$$

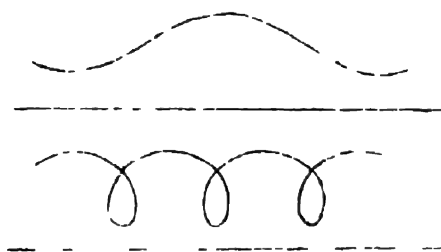
لے دیکھو جیل کا (Calculus of Variations) یا ٹاڈ ہرٹر کا تکمیلی احصا۔

Roulette and Glissettes

لے دیکھو



ہیلا زنجیر کا (Catnoid) ہے دوسرے اور تیسرے کو پلاٹو (Plateau) نے موج نما (Unduloid) اور عقدہ نما (Nodoid) کہا ہے کیونکہ اول الذکر سے ایک لہر لٹا مٹنی اور یوخر الذکر سے عقدوں کا ایک تواتر تعمیر ہوتا ہے۔



عقدہ نما (Nodoid) کی تکوین کا ایسا انداز دیکھنے کیلئے یہ تصور کرنا ہوگا کہ جیسے زائد کی ایک شاخ لڑکتی جاتی ہے فقط تماس لائق ہی فاصلے پر چلا جاتا ہے تب خط مستقیم دونوں شاخوں کا متقارب بن جاتا ہے اور دوسری شاخ لڑکنا شروع کرتی ہے اس طرح شکل میں مکمل تسلسل پیدا ہوتا ہے

مائع کی جہلیوں کے مضمون پر مختلف تصانیف و مقالوں کا مکمل تذکرہ

Encyclopaedia

(Platau) کی تصنیف اور

(Britanica) میں پروفیسر کیرک میکسویل کے مضمون میں ملے گا۔ اور قوت

شعری کے مضمون پر عموماً حسب ذیل کتابیں مفید ثابت ہو چکی (۱۹۱)

Mathieu, *l' Theorie de la Capillarite*, 1883

F Neumann, *Vorlesungen uber der Theorie der Capillaritat*, 1894

Poincaré, *Capillarite*, 1895

The articles *Kapillaritat* by H Minkowski in *Encyklop der Math Wissensch* Bd v 1907, and by F Poekels in Winkelmann's *Handbuch der Physik*, Bd 1 1908, both of which contain a full bibliography of the subject

مشال — ایک صابونی بلبل اپنے ثابت حدود سے بڑھتا ہے اس طرح کہ ان حدود کے ساتھ اس سے ایک بند فصا پیدا ہوتی ہے جس کا حجم ج ہے اس میں گیس دباؤ د پر ہے جس کی پیش مطلق ط ہے۔ گیس کی پیش میں بند رنج اضافہ کیا گیا ہے۔ اگر جہلی کا رقبہ ل ہو جبکہ پیش ط اور دباؤ د ہے تو ثابت کر دو کہ

$$د ط \frac{فر}{ط} = د ح (1 - \frac{ط}{فر} \frac{د}{ط})$$

جہاں سطحی تناؤ ت کو مستقل فرض کر لیا گیا ہے اور بیرونی دباؤ نظر انداز کر دیا گیا ہے۔

د اور ط میں ربط حاصل کر دو جبکہ بلبل کی شکل کا ہو۔

توانائی کا تغیر = ت منف ل

$$= د منف ح$$

لیکن $د ح = ک ط$ ، جہاں کہ مستقل ہے
 $\therefore د م ف ح = ک م ف ط - ح م ف د$

$$\therefore ت ف ر ا = ک - ح \frac{ف د}{ف ر ط}$$

$$= ک (۱ - \frac{ط}{د} \frac{د}{ف ر ط})$$

$$= \frac{د ح}{ط} (۱ - \frac{ط}{د} \frac{ف د}{ف ر ط})$$

کرہ کے لئے $۱ = ۱۴۴$ اور $د = \frac{۲}{۱}$
 $\therefore ۱ = ۱۴۴ ت ۲ / د$

پس مساوات مالا سے

$$- ۱۴۴ \frac{۲}{د} \frac{ف د}{ف ر ط} = ک (۱ - \frac{ط}{د} \frac{ف د}{ف ر ط})$$

$$- ۱۴۴ \frac{ت}{د} \frac{ف د}{ف ر ط} = ک (۱ - \frac{ط}{د} \frac{ف د}{ف ر ط})$$

لیکن $د ح = ک ط$

$$\therefore \frac{۱}{۳} در (۱ = ک ط یا \frac{۲}{۳} ت (۱ = ک ط$$

$$\therefore - \frac{۲}{د} \frac{ک ط}{ف ر ط} = ک - \frac{ک ط}{د} \frac{ف د}{ف ر ط}$$

$$\therefore = ۱ + \frac{ف د}{ف ر ط} \frac{ط}{د}$$

$$\therefore د ا ط = مستقل$$

امثلہ

(۱۹۲)

۱ — دو کردی صاونی بیلے ایک یانی سے اور دو سربایانی اور الکمل کے آمیزے سے

اُٹھائے گئے ہیں۔ اگر تناؤ فی خطی اینچ علی الترتیب ایک گرین اور $\frac{1}{17}$ گرین کے اوزان کے مساوی ہوں اور نصف قطر $\frac{1}{4}$ اینچ اور $\frac{1}{16}$ اینچ ہوں تو دونوں صورتوں میں کل اندرونی دباؤ کا کل بیرونی دباؤ پر برعکس دھکا کا مقابلہ کرو۔

۳۔ اگر راور نصف قطر کے دو صابونی بلبے ایک ہی مائع سے اُٹھائے جائیں اور دونوں مکرر نصف قطر کا ایک بلبہ بن جائیں تو ثابت کرو کہ تناؤ

$$\frac{\pi}{2} \times \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^2 + r_2^2}$$

کے مساوی ہے جہاں π کرہ ہوائی کا دباؤ ہے۔

۴۔ یانی اور ہوائی سطح فاصل کا سطحی تناؤ ۲۵ و ۸۰، یانی اور پارہ کی سطح فاصل کا ۶ و ۴ م، اور پارہ اور ہوائی سطح فاصل کا ۵۵ ہے۔ بارہ کی سطح پر پانی کا قطرہ رکھنے سے کیا اثر ظہور پذیر ہوگا۔

۵۔ تیل کے ایک قطرہ کو پانی کی سطح پر رکھے ہی وہ فوراً انہماقی ریتق پرست میں پھیل جاتا ہے تیل کے اس پھیلاؤ کے سبب کی تشریح کرو۔ اور منظر کے مشاہدے سے ثابت کرو کہ برت کی موٹائی اینچ سے کم ہو سکتی ہے۔

تیل کا دوسرا قطرہ سطح پر ڈال دینے سے کیا بات واقع ہوگی۔

۵۔ اگر ایک ہلکانا کا جبکہ سرے ایک دوسرے سے باندھ دئے گئے ہیں مائع کی جہلی کے اندرونی حدود کا ایک جزو ہو تو ثابت کرو کہ تاگے کے ہر لفظ پر انحصار مستقل ہوگا۔

اگر تاگہ وزنی ہو اور جہلی ایک انحصاری محور کے گرد گردشیں سطح ہو تو ثابت کرو کہ محل توازن میں تاگے کا تناؤ ہوگا

$$\frac{L}{\pi r} \sqrt{r_1^2 - r_2^2}$$

جہاں اس کا طول L ، اس کا وزن فی اکائی طول w اور جہلی کا تناؤ T ہے۔

۶۔ صابون آئیز یانی کے ذخیرے سے مائع کی ایک مستوی جہلی اُٹھائی گئی ہے ثابت کرو کہ توانائی (ع) فی اکائی رمل کی عددی قیمت، تناؤ (ت) فی اکائی

۱۲۔ باریک سیدنے تار، ایک مربع ذوار بعتہ السطوح یا چار سطحی کی شکل کا ہے اس کو سابلون اور پانی کے نسلول میں داخل کر کے اوپر کھینچ لیا گیا ہے جس سے بعض صورتوں میں مستوی جہلیاں پیدا ہوتی ہیں جن کی ابتدا کناروں سے ہوتی ہے اور جو ایک نقطہ پر آکر ملتے ہیں تاسیہ، کروکہ ہر چار سطحی کے لئے توازن کی یہ شکل ممکن نہیں ہے اور کہ یہ اس دقت ممکن ہے جبکہ ایک رخ متساوی الاضلاع مثلث اور دوسرے رخ متساوی الساقین مثلثات ہوں جن کے زوایا اس میں سے ہر ایک 120° (۱۲۰) سے کم ہو۔

۱۳۔ سیٹھے کی دو متوازی تختیوں کے درمیان بہت ہی کم فاصلہ دے۔ اس کے درمیان پانی داخل کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ تختیاں ایک دوسرے کی طرف ایسی قوت سے کھینچ آئیں گی جو

$$۲ \left\{ \text{تجم} + \text{ب} \right\} \text{تجم} + \text{ب}$$

کے مساوی ہے۔ جہاں جہلی کا رقبہ اور اس کا گھیراؤ ہے۔
 ۱۴۔ سیٹھے کا ایک کھوکھلا قائم مستدیر مخروط متجانس مائع میں رکھا گیا ہے اسطو پر کہ ایک محور امتصائی اور اس اوپر وار ہے۔ مخروط میں کس بلندی تک مائع چڑھ سکا۔ اندرونی مائع کی سطح کی نثری مساوات معلوم کرو۔ اسطوانہ کی صورت میں نتائج افکار۔
 ۱۵۔ ایک سوئی پانی پر تیر رہی ہے اس طور پر کہ اس کا محور پانی کی قدرتی ہموار سطح میں واقع ہے اگر غولہ کی کثافت اضافی بلحاظ پانی کے $\frac{1}{2}$ ہو اور قوت شعری کا زاویہ θ ہو اور وہ زاویہ $\frac{1}{2}$ ہو جو پانی کو مس کرنیوالی عمودی تراش کی قوس محور کے محاذی باقی ہے تو ثابت کرو کہ

$$(n - \theta) = \text{جب } \frac{1}{2} = (n - \theta) = \text{جم} + \text{جم} + \frac{1}{2} (n + \theta)$$

۱۶۔ ایک شعاری نلی گردش سطح کی شکل کی ہے اس کو انقباضی محور کے ساتھ ایک مائع میں جزو غرق کر دیا گیا ہے نکو یہی معنی کی مساوات معلوم کرو اگر مائع توازن میں دے خواہ اس کا ارتفاع نلی میں کچھ ہی ہو۔

۱۷۔ ایک جسامتی کُبلہ کو ایک گیس کی کمیٹک سے جھروایا گیا ہے جس کا زاویہ بخت
پیش بر م α (اس کی کثافت) ہے۔ کُبلہ کا نصف قطر ρ ہوتا ہے جبکہ اس کو ہوائیں کھدیا گیا
اس کے بعد مار پیٹا کا ارتقاع بڑھتا ہے اور پیش بر م α سے تھوڑا سی ہے۔ تاہم یہ کہ کُبلہ
کا نصف قطر بڑھتا ہے یا گھٹا ہے موصلاً اس سے کہہ سکتے ہیں۔

$$\frac{9}{8} \frac{mk}{\rho} \text{ سے زیادہ یا کم ہو۔}$$

۱۸۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$m = \frac{1}{2} \rho \pi r^2 \quad (1)$$

بائع کی جہلی کی ایک ممکن شکل کو تعبیر کرتی ہے جبکہ دونوں طرف دباؤ وہی ہو۔

۱۹۔ اگر دو سونماں جہلیائی رقبہ ρ ہیں متساوی ایک دوسرے کے متوازی
رکھ دی جائیں تو ثابت کرو کہ وہ لفظ ایک دوسرے کی طرف کھینچ آئیں گی اور یہ کہ یہ
کشش سطحی تناؤ کی وجہ سے ہوگا۔

۲۰۔ ایک جھوٹا کعبہ بائع میں تیرا سے اس شور پر کہ کعبہ کی سطح کے ساتھ
بائع کا زاویہ تماس منفرد ہے اور α ۔ عد کے مساوی ہے اور کعبہ کا زاویہ تماس
افقی ہے۔ اگر بائع کی کثافت ρ اور کعبہ کی فز ہو اور اگر سطحی تناؤ γ ہو تو ثابت
ہو تو ثابت کرو کہ کعبہ تیرے کا اگر

$$\frac{\gamma}{\rho} > 2 + \frac{1}{2} \rho \quad \text{جب} \quad \left(\frac{\gamma}{\rho} - \frac{1}{2} \right)$$

۲۱۔ نصف قطر کے دو دائری قرص اس طرح رکھے گئے ہیں کہ ان کے مسہری
ان کے مرکزوں کو ملانے والے خطیر غم و ہیں۔ ان قرصوں کے محیطوں کو صابوں
کی ایک جہلی سے ملایا گیا ہے جس کے اندر اتنی کمیٹ کی ہوا ہے جتنی کہ اُسی کرہ
ہوائی میں ج نصف قطر کے ایک کرہ کی لسلہ کو عین بھر سکتی ہے۔ اگر جہلی اسطوارہ
کی شکل کی ہو جبکہ قرصوں کے درمیان فاصلہ ب ہو تو ثابت کرو کہ قرصوں کے درمیان

فاصلہ کو $\frac{1}{2} \rho$ تک ٹھکانا ہوگا تاکہ جہلی کرہ کی شکل اختیار کرے جہاں

$$y = (2^2 + 2^1 + 1) \left\{ 2^2 - 2^1 - 2^0 \right\} + \frac{2^2 - 2^1 - 2^0}{2^2 + 2^1 + 1}$$

$$= 2^2 - 2^1 - 2^0 = 2^2 - 2^1 - 2^0$$

۲۲۔ تاروں کا ایک فریم ب ارتقاع کے منشور کی شکل کا ہے جس کے قاعدے صلیع کے متساوی الاضلاع مثلث ہیں۔ اگر اس فریم کو عابون آمیز بانی میں ڈب دیا جائے تو توازن کی حالت میں مستوی چلیوں کی ترتیب کی نشتر بخ کرو۔ مستوی چلیوں کی صورت میں توازن کے امکان کے لئے ثابت کرو کہ ب، اور رات سے بڑا ہونا چاہیئے۔

۲۳۔ سیال کی ایک جہلی دو ایسے تاروں کو چپکی ہوئی ہے جس میں سے ہر ایک مرغول (Hex) کا ایک پیر (Turn) ہے۔ دونوں مرغولوں کے محور ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔ دوران کے محاور (Steps) مساوی ہیں۔ ثابت کرو کہ جہلی کے توازن کی شرط پوری ہوگی اگر محور میں سے گذر نیوالی جہلی کی کسی تار کے تفرقی مساوات

$$f = \frac{2^2 + 2^1 + 1}{2^2 - 2^1 - 2^0}$$

کی شکل کی ہو جبکہ ۲۲ عدد ہر مرغول کا کام یعنی دو متضاد چوڑیوں (Threads) کا درمیانی فاصلہ۔

۲۴۔ تار کے ایک مرغول کی گھائی ب ہے اور اس کا طول بمقابلہ اس کے قطر کے بہت بڑا ہے اس لئے محور کے سروں سے ایک پچکدار ڈوری (چپک کی قدر ع) بائد دی گئی ہے تار کے ہر سروے کو نصف قطر کی سمت میں موڑ دیا گیا ہے تاکہ وہ محور سے جالے۔ ڈوری جب سیدھی دیتی ہے نوچست لیکن بے تنی ہوئی ہوتی ہے اگر مرغول اور ڈوری کو عابون کے محلول میں ڈبو کر نکال لیا جائے تو ایک جہلی تار اور ڈوری سے چپکی ہوئی نکلتی ہے ثابت کرو کہ سروں کے نزدیک کے حصوں کے سوا ڈوری نصف قطر کے ایک مرغول میں گھنچ جاتی ہے جہاں مساوات (۱۶) ف ۲ ت ۲ - ۲ ۱ ع ۲ + ۲ ۲ ۳ ف ۲ ت ۲ ع ۲

کرہ ہوائی سے گھرا ہوا ہے۔ اس کے اندر ایک ہم مرکز جوف ہے جو ہوا سے بھرا ہوا ہے جس کا حجم اس کرہ ہوائی کے دباؤ پر $\frac{2}{3}\pi r^3$ ہوتا ہے۔ مانع کا سطحی تناؤ T ہے۔ ثابت کرو کہ توازن کی صورت میں جوف کا نصف قطر لا مساوات

$$\pi \left(\frac{2}{3} - \frac{r^3}{3} \right) = 2T \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{r+2} \right\} + \frac{2}{3}\pi r^3 \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{r+2} \right\} - \frac{2}{3}\pi r^3$$

سے حاصل ہوگا۔

۲۹۔ اگر کثافت ρ کے مانع کی کچھ کیت قوتوں کے ایک بقائی نظام کے زیر عمل توازن میں ہو جن کا قوتہ کسی نقطہ پر مرتب ہے جہاں r ایک ثابت نقطہ و سے فاصلہ ہے اور اگر شیشہ کی دو متوازی تختیاں جن کے نزدیک زرخوں کے درمیان بہت چھوٹا فاصلہ $\frac{1}{2}$ ج ہے مانع میں د کے متقابل جانبوں میں رکھ دی جائیں اور اگر ان تختیوں میں د کے متقابل چھوٹے سوراخ ہوں جن میں سے مانع بہہ کر جاسکتا ہے تو ثابت کرو کہ ایک جوہر دو تختیوں کے بھیجے ہوئے دائری رقبوں کے اندرونی و بیرونی نصف قطر ہیں مساوات

$$m \text{ ج } T \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) = m \text{ ج } m$$

سے مربوط ہونگے۔ جہاں m وہ مادہ ہے جو ماہوائی سطح شیشے کے ساتھ بناتی ہے اور m شکاری مستقل ہے۔

۳۰۔ شیشے کی ایک بڑی تختی ایک مانع کی سطح سے اٹھائی گئی ہے اس طرح مانع ف اور کثافت ρ کا ہے اور تختی کی غلی سطح کے ساتھ زاویہ تماس کا متمم θ ہے ثابت کرو کہ مانع سے بھیجے ہوئے دائری حصہ کا نصف قطر تقریباً

$$\frac{1}{2} \rho \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) / \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \text{ جب } \frac{1}{2} \rho \text{ ہو}$$

ہے۔ جہاں $\rho = 2T / \text{ج}$ T سطحی تناؤ T اور مانع کی کثافت ρ ہے۔
۳۱۔ مانع کی ایک جہلی ایک گردشی سطح کی شکل میں ٹنک رہی ہے اس کا محور انحصاری ہے۔ اس کی اوپر کی حد یا احاطہ ایک دائری تار ہے جو انفاٹھا گیا ہے

اور بجلی حد ایک دزنی یکدہار تاگا ہے جو نصف قطر کے ایک افقی دائرہ کی شکل میں
آزادانہ ٹپک رہا ہے۔ تاگے کا قدرتی طول ۲۴ و اس کے پچک کی قدر ۱۰
اس کا وزن ۱۲ و اور جہلی کا تناؤ ۲۰ ہے۔ ثابت کر دو کہ مسادات

$$(۲ - ۲۰) (۲ - ۲۰) + (۲ + ۲۰) (۲ + ۲۰) = ۰$$

کو پورا کرتا ہے۔

۳۔ مائع کی ایک جہلی بیرونی طرف سے ایک اسے سداستوار سے محدود ہے
جس کے (تار کے) منحنی کا ایک ہی مستوی میں ہونا ضروری نہیں جہلی کی اندرونی
حد ایک ہند لائنم تاگا ہے۔ ثابت کر دو کہ کسی سطح پر تاگے کا نصف قطر انحناء مستقل
ہے اور یہ کہ مرٹر (Torsion) کا نصف قطر جہلی کے اس نقطہ پر کے
کسی ایک صدی نصف قطر انحناء کے عددًا مساوی ہے۔

۳۔ تار کے ایک دائرہ کو (نصف قطر) صابون آمیز پانی کی سطح میں رکھ کر
آہستہ آہستہ اٹھایا گیا ہے تاکہ اس کے ساتھ ایک جہلی اٹھ آئے۔ اس کے
ورن کو نظر انداز کر کے ثابت کر دو کہ جہلی کی نصف انہاری فزاش ایک ربعیرہ ہے۔ جہلی
پانی کی ہوا سطح کو جس را دیہیر ملتی ہے اس کو معلوم کرو۔ یہ ثابت کر دو کہ نصف انہاری
منحنی کا مبدل جبکہ جہلی کا رقبہ ۲۴ کے مساوی ہو ۱/۲ ہے جہاں ی

$$\text{جزئی} = ی (ی - ۱) = ی$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

(۱۲۶)

۳۔ ستاری نلی کا سر اجب پانی میں ڈھونڈا جاتا ہے تو پانی ف ارتفاع تک
اس میں چڑھ جاتا ہے۔ نلی کو پانی سے ہٹا لیا جاتا ہے اور نصف قطر کا
ایک قطرہ اس کے سرے پر نمودار ہوتا ہے اگر نلی میں تھپے ہوئے پانی کا طول قطرہ
کی تہ سے نلی کے اندرونی آبی ستون کی چوٹی تک ف ہو تو ثابت کر دو کہ سطحی ٹاؤ مشافہ

$$۲ \text{ ف} / \text{رج ث} = (ف - ف) - \frac{۱}{۲}$$

سے حاصل ہوگا جہاں کثافت کو ث تغییر کرتا ہے اور بہان دیا گیا ہے کہ نظر کر دیا ہے۔
 ۳۵۔۔۔ دوداڑی جھلے جن کا شتہ ک ٹھوران کے مستویوں پر علی القوام ہے مانع کی
 ایک بند جہلی کو تھامی ہوئی ہیں۔ جہلی کی ادرونی ہوا بیرونی ہوا سے زیادہ دباؤ پر
 ہے۔ ثابت کر دو کہ جہلی کے سرے نصف قطر $\frac{1}{2}$ کے کرسے ہیں اور جہلیوں کی
 درمیانی سطح ایک گردغنی سطح ہے جس کے نصف البہاری سطحی کی ذاتی مساوات
 جب $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$ ہے جہاں محور کے ساتھ عماد کا سیلان فرمے اور حاصلہ
 محور سے لائے۔

۳۶۔۔۔ اگر مانع دو ستوازی انتصابی تختوں کے درمیان ستواری عمل سے اوپر کھینچا
 جائے تو ثابت کر دو کہ ساکن سطح کے اوپر آزاد سطح کے کسی نقطہ پر چڑھاؤ ف / طن $\frac{1}{2}$ میں
 ہے جہاں ماس کا ارتفاع ف اور آزاد سطح کی قوس س ہے جو اس سے
 ناپی گئی ہے سطحی تناؤ ت، $\frac{1}{2}$ ج ث م کے مساوی ہے اور مقیاس ک =
 م / (ف + م) $\frac{1}{2}$

۳۷۔۔۔ نصف قطر کا ایک طویل مستدیر اسطوانہ مانع میں کلا غرق ہے مانع کے
 ساتھ اس کا حادثہ زادہ تماس عم ہے۔ اس کے محور کو افقاً رکھ کر اس کو بندہ رج
 مانع سے نکالا گیا ہے ثابت کر دو کہ مانع کی ابتدائی اور انتہائی ہموار سطح کے اوپر ف
 ارتفاع تک جب اسطوانہ کا محور پہنچ جاتا ہے تو مانع کے ساتھ تماس ٹوٹ جاتا ہے جہاں
 ف مساواتوں

$$ف = رجم (د - ع) + م جم \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} م جم (ذ - ع) + ۲ جب \frac{1}{2} - مسز' جب \frac{1}{2}$$

$$= ۲ جب \frac{1}{2} - مسز' جب \frac{1}{2}$$

سے حاصل ہوا ہے اور سطحی تناؤ کو مانع کی کثافت کے ساتھ جو نسبت ہے وہ $\frac{1}{2}$ ج م $\frac{1}{2}$

۳۸۔ مانی کا ایک قطرہ شیشے کی ایک انفتی تختی کی پختی سطح سے ٹٹک رہا ہے اگر سطحی تناؤ کو یانی کے ذہنی وزن کے ساتھ نسبت منہ ہو اور $\frac{1}{4} \text{ مہ} = \frac{1}{6} \text{ مہ} (\text{فرزہ/فرس})$ جہاں قطرہ کے نصف الہاری منحنی کی قوس س ہے اور وہ زاویہ ہے جو نصف الہاری منحنی کا اس افقی سے بنا ہے تو ثابت کرو کہ

$$(\text{جب } \frac{1}{4} \text{ مہ} + \frac{1}{6} \text{ مہ}) = \frac{1}{2} \text{ مہ} \quad \frac{1}{4} \text{ مہ} = \frac{1}{6} \text{ مہ} \quad \frac{1}{4} \text{ مہ} = \frac{1}{6} \text{ مہ}$$

$$\left(\frac{1}{4} \text{ مہ} + \frac{1}{6} \text{ مہ} \right) = \frac{1}{2} \text{ مہ} \quad \frac{1}{4} \text{ مہ} = \frac{1}{6} \text{ مہ} \quad \frac{1}{4} \text{ مہ} = \frac{1}{6} \text{ مہ}$$

جہاں $\frac{1}{4} \text{ مہ} = \frac{1}{6} \text{ مہ}$ اور $\frac{1}{4} \text{ مہ} = \frac{1}{6} \text{ مہ}$ اور یہ کہ مربع قطرہ انداز کر دیا جائے تو ثابت کرو کہ نصف الہاری منحنی کے انحناء مربع ہے

$$\frac{\frac{1}{4} \text{ مہ}}{\frac{1}{6} \text{ مہ}} = \frac{\frac{1}{4} \text{ مہ}}{\frac{1}{6} \text{ مہ}}$$

ہاں $\frac{1}{4} \text{ مہ} = \frac{1}{6} \text{ مہ}$ اور نقطہ انعطاف پر لا کی قیمت لا ہے۔

۳۹۔ دیر اس ۲ کا ایک طویل نا۔ مانی میں تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کا قاعہ افقی اور اس کا اوپر کا کنارہ افقی کی مدد سے ہوا سطح میں ہے۔ اگر سروں پر شعاعی مثل نظر انداز کر دیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{4} \text{ مہ} = \frac{1}{6} \text{ مہ} \quad (\text{جب } \frac{1}{4} \text{ مہ} + \frac{1}{6} \text{ مہ})$$

جہاں فائدہ کہ وزن فی اکائی طول و اس کے مساوی حجم کے بانی کا وزن و سطحی تناؤ مت اور قوت شعری کے رادہ کا کلمہ ہے۔

۴۰۔ حجم کے یارہ کا ایک قطرہ بعبیر ونی قوتوں کے عمل کے شیشے کی دو ہوازی چھتوں کے درمیان دھایا گیا ہے۔ قوتوں کا درمیانی نا صلیف سطحی تناؤ مت شیشے از یارہ کے لئے رادیہ تماس نہ ہے۔ ثابت کرو کہ مطلوبہ دہان کی مقدار

$$\frac{1}{4} \text{ مہ} = \frac{1}{6} \text{ مہ} \quad (\frac{1}{4} \text{ مہ} - \frac{1}{6} \text{ مہ})$$

ہے جہاں
 $f = ۲$ (طن ۲ - م) فرع، $۲ = ۲$ (طن ۲ - م) (طن ۲ - م) فرع

اور $m = \left(\frac{p}{q}\right) = \text{حم م م (نہ + ط م) لہ}$
 جب تختیاں ایک دوسرے سے بہتہ نزدیک ہوں تو ثابت کرو کہ دباؤ پہلے تقرب مک
 $\frac{۲}{f} = \frac{۲}{۲}$ جمہ
 ہے۔

۴۔ سیال کا ایک قطر جو کسی قوتوں کے زیر عمل نہیں ہوا ہے یکساں بیرونی دباؤ
 اور سطحی تناؤ کے ایک استوار جسم کی طرح ایک محور کے گرد لٹوم ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ
 سطح پر $\frac{۲}{f} = \frac{۲}{۲}$ مستقل ہے جہاں m سما سطح کے مداری قطر انحنائیں۔
 ۵۔ جب سما محور سے بیچے انتہائی ہو اور سبب مناسب منتخب کیا گیا ہو تو ثابت
 کرو کہ m سما کثافتوں کے دو سیالوں کی سطح فاصل میں ربط

$$y = \frac{1}{2} (s_1 + s_2)$$

کو پورا کرتی ہے۔ جہاں انحنائے صدی نصف قطر سما ہیں جن کو مضبوط قرار دیا گیا
 ہے جبکہ تقریبی دار ہو، $y = \frac{1}{2} (s_1 + s_2)$ (م - م) اور درمیانی رخ کا شعاری
 مستقل ہے۔

اگر سطح محوری کے گرد گردشیں سطح ہو تو ثابت کرو کہ محور کے نزدیک کے حصہ کی تقریبی
 مساوات (اسطوانی محدودوں میں)

$$y = \frac{1}{2} (s_1 + s_2) = \frac{1}{2} (y_1 + y_2) = \frac{1}{2} (y_1 + y_2)$$

کی شکل کی ہوگی اور بتاؤ کہ جب نلی میں مائع ہو تو ایسی صورت میں y زاویہ تماس
 کی رقوم میں کس طرح بیان کیا جاسکتا ہے۔

باب یازدہم

گھومنے والے مائع کا توازن جس کے ذرات ایک دوسرے کو جذب کرتے ہیں

۱۸۶۔ اگر مائع کی کچھ کمیت جس کے ذرات ایک معین قانون کے بموجب ایک دوسرے کو جذب کرتے ہیں یکساں رفتار سے ایک تاب محو کر کے گرد گھومنے تو آزاد سطح کی کسی خاص شکل کے لئے یہ قرین قیاس ہے کہ مائع کے ذرات اصفانی نوارن کی حالت اندازہ کر سکتے ہیں۔ بہر کیف چونکہ کسی ذرہ کی کمیت کی حاصل کشش عام طور پر اس کی شکل پر منحصر ہوگی جو غیر معلوم ہے اس لئے اس مسئلہ کا مکمل حل حاصل نہیں کیا جاسکتا۔

کشش کے کسی اختیاری طور پر مقرر کردہ قانون کی صورت میں یہ مسئلہ محض لٹری دیکھسی کا باعث ہو سکتا ہے۔ لیکن جب یہ قانون تجاذب کا قانون ہو تو اس کی اہمیت بڑھ جاتی ہے کیونکہ طبیعی ہیت کے ایک مسئلہ سے اس کا تعلق ہے۔

ہم سیال کو متعائن خیال کرینگے اور اپنی توجہ صرف دو صورتوں تک محدود رکھیں گے۔ پہلی صورت میں متعابی قوتوں کا فاصلے کے متناسب ہونا اور دوسری صورت میں یون کے کلبہ کی باندی کرنا فرض کر لیا جاتا ہے۔

۱۸۷۔ متعائن مائع کی کچھ کمیت اپنی کمیت کے مرکز میں سے گزرنے والے ایک محور کے گرد یکساں رفتار سے گھوم رہی ہے۔ اس کے ذرات ایک دوسرے کو ایسی قوت سے جذب کرتے ہیں جو ایسے بدلتی ہے جیسے فاصلہ آزاد سطح کی شکل متعین کرنا مطلوب ہے۔

کسی ذرہ پر کچھ حاصل کشش اس فاصلے کی مدد میں اور اس کے متناسب ہے

جو ذرہ اور کیت کے مرکز کے درمیان ہے ، اور اگر سیال کی کل کیت کا ناپ
 وہ ہو تو نقطہ لا ، لا ، ی پر کے سیالی ذرہ پر حاصل گردش کے اجزائے ترکیبی
 محوروں کے متوازی ، مہ لا ، مہ ما ، مہ می سے تعبیر ہو سکتے ہیں ۔
 مہ لا کو مرکز ثقل پر لینے سے اور گردش کے محور کو محوری قرار دیتے تے
 توازن کی مساوات ہے

$$\text{فرد} = \{ (\text{سہ لا} - \text{مہ لا}) \text{فرلا} + (\text{سہ ما} - \text{مہ ما}) \text{فرما} - \text{مہ می فرمی} \}$$

اور اس لئے

$$د = \text{مہ} + \text{پا} \{ (\text{سہ لا} - \text{مہ لا}) (\text{لا} + \text{ما}) - \text{مہ می} \}$$

آزاد سطح پر د صفر یا مستقل ہے اور آزاد سطح کی مساوات ہے

(۱۹۹)

$$(ا - \text{سہ}) (\text{لا} + \text{ما}) + \text{مہ می} = \text{ل}$$

مستقل لی سیال کی کیت پر اور سہ پر منحصر ہوگا۔

سہ جب بہت چھوٹا ہوتا ہے تو آزاد سطح تقریباً گردی ہوتی ہے اور جیسے
 سہ صفر سے مہ تک بڑھتا ہے تو گردی سطح قطبین پر زیادہ تر چسپی ہوتی جاتی ہے۔
 جب سہ = مہ تو آزاد سطح دو مستویوں پر مشتمل ہوتی ہے اس کو ممکن بنانے
 کے لئے ہم یہ تصور کر سکتے ہیں کہ سیال ایک اسطوانی سطح کے اندر گھرا ہوا ہے جس کا محور
 گردش کے محور پر منطبق ہوگا۔

جب سہ = مہ تو آزاد سطح زائد نفاذ دو چادری ہوتی ہے جو سہ کی ایک
 خاص قیمت (سہ) کے لئے مخروط بن جاتی ہے اور سیال اس نفاذ کو بڑھاتا ہے جو
 مخروط اور اسطوانے کے درمیان ہے۔ سیال کے حجم کو محسوب کر کے لی = رکھنے
 سے سہ کی تعین ہو سکتی ہے کیونکہ اس صورت میں مہ لا پر دباؤ معدوم ہو جاتا ہے۔
 اگر سہ < سہ تو آزاد سطح زائد نفاذ چادری ہوتی ہے جو جیسے سہ بڑھتا ہے
 اسطوانہ کی شکل کے قریب آتی ہے اور اس لئے سہ کی بڑھی قیمتوں کے لئے یہ
 قیاس کرنا ضروری ہے کہ اسطوانہ جس کے اندر سیال ہے اسے سروریں بند ہے۔

اس دفعہ کے نائچ غیر متجانس سیال پر بھی صادق آتے ہیں خواہ متواتر طبقات میں کرنا۔ اس کے نفع کا قانون کچھ ہی ہے۔

۱۸۸ — متجانس مائع کی چمکیت جس کے درات کلیہ یون کے بموجب ایک دوسرے کو جذب کر۔ لے ہیں امنانی توازن کی حالت میں اپنی کمیت کے مابین سے گزرے۔ اسے ایک سو کے گرد یکساں رفتار سے گھوم رہی ہے۔ سطح کی ممکن شکل معلوم کرنا مطلوب ہے۔

اس مسئلہ کا ایک حل درج کرنا ممکن نہیں جس کی وجہ پر تلامذہ کی گئی ہے لیکن یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ یہاں (Oblique) کردہ توازن کی ممکن شکل ہے۔ فرض کر دے کہ یہ مائع کی مسادات سے

$$1 = \frac{y^2}{2g} + \frac{z^2}{2g(1 + \frac{v^2}{g})}$$

جہاں گردش کا محور محور رہی ہے۔ تب نقطہ لا، ما، ی پر کے ذرہ پر مباد کی سب میں محاور کے متوازی حاصل کشتیں بالترتیب

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{y^2}{2g} + \frac{z^2}{2g(1 + \frac{v^2}{g})} \right\} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{y^2}{2g} + \frac{z^2}{2g(1 + \frac{v^2}{g})} \right\} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{y^2}{2g} + \frac{z^2}{2g(1 + \frac{v^2}{g})} \right\} = 0$$

سے تعبیر ہو چکی۔

۱۹ — مائیس کی (Mecanique Celeste) مائیس کی (Mecanique) (Mecanique) اور ٹاؤنہنر کی سکونیات میں۔ جملے لیکے۔ موجد الکر کتاب میں کہ ما کی مسادات (لا، ما، ی) + م/۸ (۱ - ر) = ۱ لیکن یہ لیکن ۱ = ر/ (۱ + لا) رکھنے سے مذکورہ بالا جملے حاصل ہوتے ہیں۔

توازن کی مساوات ہے

$$\text{فرد} = \text{ش} \left\{ \begin{array}{l} (1) \text{ لا} \\ (2) \text{ لا} \\ (3) \text{ لا} \end{array} \right\} \text{فلا} + \text{رسمہ} + \text{ما} + \text{فریا} - \text{سے فری} \left\{ \right.$$

لیکن کردہ بنا کی مساوات سے

$$\text{لا} + \text{لا} + \text{ما} + \text{فریا} + (1) \text{ لا} + (2) \text{ لا} + (3) \text{ لا} = \text{سے فری} =$$

اور چونکہ اسلومساوی و باؤ کی سطح ہونا چاہیے اس لئے

$$\text{سے} - \text{ک} / \text{ر} = \text{ما} / \text{ر} = \text{سے} / \text{ر} = (1) \text{ لا} + (2) \text{ لا} + (3) \text{ لا}$$

پس پھر حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{سے} - \text{ک} / \text{ر}}{\text{ش}} = \frac{(1) \text{ لا} + (2) \text{ لا} + (3) \text{ لا}}{\text{ر}} = \frac{(1) \text{ لا} + (2) \text{ لا} + (3) \text{ لا}}{\text{ر}} = \frac{(1) \text{ لا} + (2) \text{ لا} + (3) \text{ لا}}{\text{ر}}$$

$$(1) \text{ لا} + (2) \text{ لا} + (3) \text{ لا} = \frac{\text{سے} - \text{ک} / \text{ر}}{\text{ش}} \times \text{ر} = \frac{\text{سے} - \text{ک} / \text{ر}}{\text{ش}} \times \text{ر}$$

اگر سہ درت دئے جائیں تو اس مساوات سے لہ متعین ہو جائیگا اور
بھر کردہ ما کے پھر محوروں کی باہمی نسبت معلوم ہو جاتی ہے۔
اصلی حل دریافت کرنے کے لئے فرض کرو کہ

$$(1) \text{ لا} + (2) \text{ لا} + (3) \text{ لا} = \frac{\text{سے} - \text{ک} / \text{ر}}{\text{ش}} \times \text{ر}$$

مس لا کی بجائے اس کے سلسلے کو بند بن کر دے تے جسے ہم جانتے ہیں کہ مستحق

ہے جبکہ لا > حاصل ہوتا ہے

بقیہ نوٹ صفحہ (۳۰۶) کے استعمال سے پھر منطق متداول مسائل ہیں ۴ میں شامل اشکال

کیلون اور شیت (Natural Philosophy) کے دہ ۵۲۰ میں اور دوسرے تجلیلی سکونیات

حصہ دوم صفحہ ۲۱۹ میں مذکور ہیں۔

$$(ج) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{(-1)^n} = 1$$

$$\text{نیز دیا} \quad \frac{(9+لا^2)}{لا} - \frac{(9+لا^2)}{(لا+1)^2} = \text{سن لا}$$

$$(گم) \quad \left\{ \frac{لا^2+9}{(لا+1)^2(9+لا^2)} - \text{سن لا} \right\}$$

$$= \frac{لا^2+9}{لا} \text{ ف (لا)}$$

جہاں

$$\text{ف (لا)} = \frac{لا^2+9}{(لا+1)^2(9+لا^2)} - \text{سن لا}$$

اشکال (ج) اور (ب) سے ظاہر ہے کہ بالترتیب لا = ۰ اور لا = ∞ کے لئے
اسدوم ہو جاتا ہے۔ اب ہم یہ بتائیں گے کہ جیسے لا صفر سے بڑھتا ہے تو ایک
اور صرف ایک خوب اعظم اختیار کرتا ہے۔

۱/۲ کی علامت صرت ف (لا) کی علامت پر منحصر ہے،

$$\text{نیر جب} \quad لا = ۰ \quad \text{تو} \quad \text{ف (لا)} = ۰$$

$$\text{اور جب} \quad لا = \infty \quad \text{تو} \quad \text{ف (لا)} = -\frac{9}{4}$$

یہ ہمیں حاصل ہوتا ہے

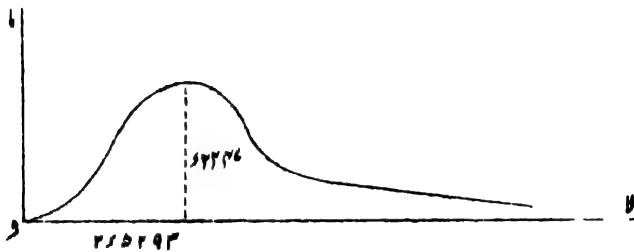
$$\text{ک (لا)} = \frac{لا^4(لا^2-9)}{(لا+1)^2(9+لا^2)}$$

اور یہ لا = ۰ سے لا = ∞ تک مثبت ہے اور اس سے بڑی لا کی تمام قیمتوں
کے لئے منفی پس ف (لا) مثبت ہونے سے ابتدا کرتا ہے اور اس وقت
مک ٹرنفا ہے۔ جب لا = ∞ تک بڑھتا ہے ایک لاکھ اس سے بڑی قیمتیں
ف (لا) مسلسل گھٹتا ہے۔ اس لئے ف (لا) لاکھ ایک ایسی قیمت کے

لئے معدوم ہوتا ہے جو اس سے بڑھی ہے۔ جدولوں کی دیکھ کر ہر باسانی دیکھ سکتے ہیں کہ (۲) مثبت ہے اور (۳) منفی، اس لئے مطلوبہ قیمت ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہے۔ نیز $f(2.5) = 0.025$ تقریباً اور

$$\text{نیوٹن کے طریقہ تقریب سے } 2.5 - \frac{f(2.5)}{f'(2.5)} = 2.5 + 0.293 =$$

$$2.793$$



پس $\frac{f(x)}{f'(x)}$ صرف اس وقت معدوم ہوتا ہے جبکہ $2.793 =$

اور اس وقت λ اعظم ہے اور اس کی قیمت 2.224 ہے۔

اس لئے مساوات (۲) کی ترمیم اس شکل ہوگی جو زیر میں دکھائی گئی ہے

لیکن اس میں معین کا پیمانہ فضلہ کے پیمانہ سے بڑا لیا گیا ہے۔

پس ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ اگر $\frac{f(x)}{f'(x)} < 2.224$ تو چپٹا

کرہ نما توازن کی ممکن شکل نہیں ہو سکتا۔ لیکن اگر $\frac{f(x)}{f'(x)} > 2.224$ تو

دوکرہ نمائی اشکال ممکن ہیں کیونکہ 2.224 سے کم، معین کی ہر قیمت کے جواب میں

فضلہ کی دو حقیقی قیمتیں λ ، λ حاصل ہوتی ہیں۔

۸۹۔ کرہ نمائی اشکال کی بلیلیجیت۔ جب λ کی دو حقیقی قیمتیں λ ، λ (۲۰۲)

ہوں تو ایک 2.793 سے بڑی اور دوسری اس سے کم ہوگی۔ فرض کرو کہ $\lambda < \lambda$

تو جیسے $\frac{f(x)}{f'(x)} > 2.224$ ہے λ گھٹتا ہے اور λ بڑھتا ہے (دیکھو شکل)

اور چونکہ لمبے ۲۵۲۹۳ اس لئے $۱ + ۱$ لمبے < ۲۵۶۲ لیکن نیم محوروں میں نسبت $۱ + ۱$: اس لئے اس لئے ل کی بڑی قیمت ہمیشہ بہت زیادہ چھپے کرہ نما کو تعبیر کرتی ہے اور $۲/۲$ ث π کو ہم جتنا زیادہ چھوٹا لیں وہ کرہ نما زیادہ تر جیٹا ہو جاتا ہے جو اصل لمبے کے متناظر ہے۔
 نیز $۲/۲$ ث کی جیوڈیٹ قیمتوں کے لئے اصل لمبے چھوٹی ہوگی اور اگر وہ کرہ نما کی پیلجیت کو تعبیر کرے تو

$m(1 + \frac{1}{2}) = m(1 + \frac{1}{2})$ اس طرح $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ تقریباً اور اس لئے مساوات (ج) سے

$$\frac{1}{15} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+n)(1+n)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+n)(1+n)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+n)(1+n)}$$

سہ کی پہلی ترتیب تک - !

۱۵ = $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+n)(1+n)}$ تقریباً
 میکاں پہلا شخص تھا جس نے یہ ثابت کیا کہ سنجاس سیال کی کمیت جبکہ وہ گہوم رہی ہو تو نازن کی نما شکل پیدا کرے گا ہوتی ہے اور اس لئے ان کرہ نماؤں کو عام طور پر میکاڈن کے کرہ نما کہتے ہیں۔

۱۵۔ ایتے جان کی صورت میں اس مسئلہ کا استعمال جس کی کثافت زمین کی اوسط کثافت کے مساوی ہے۔

اگر ہم فی الحال زمین کو نصف قطر کا ایک کرہ مابین اور اس کی اوسط کثافت کو $\frac{1}{2}$ سے تعبیر کریں تو اس کی سطح پر کی کثافت $\frac{1}{2}$ ث سے تعبیر ہوگی۔
 اس سے قطب پر جاذبہ ارض کی قوت (ج) کی بھی پیمائش ہو جاتی ہے۔

لے ڈارن کی کتاب Scientific Papers ۲۳ ص ۲۳ میں $\frac{1}{2} \pi$ ث کی قیمت پیلجیت کی تیسری قوت تک مائل کی گئی ہے۔

س۔ گ۔ میں نظام کی اکائیوں میں ج = ۹۸۰ تقریباً اور ۲۲ = ۴ × ۹۰ سنٹی میٹر۔
اس لئے ہینی اکائیوں میں

$$\text{ث} = ۳ / ج = ۲۲ / ۳ = ۳۶۶۵۵ = ۹۶۰$$

اگر ہم کرہ نمائی شکل کے لئے $۲۲ / ۳$ ث کو اس کی انتہائی قیمت ۲۲۴ کے مساوی لیں اور ث کی شدہ کرہ بالا قیمت کو استعمال کریں تو محوری گردش کا وقت $۲۲ / ۳$ سے ۲ گھنٹے ۲۵ منٹ حاصل ہوتا ہے۔ اس لئے یہ قلیل ترین وقت ہے جس میں کچھ متجانس کیت جس کی کثافت زمین کی اوسط کثافت کے مساوی ہے یکساں رفتار سے ایک چپے کرہ نما کی شکل میں گھوم سکتی ہے۔

پھر اگر ہم $۲۲ / ۳$ سے زمین کی زاویائی رفتار $\frac{۲۲}{۳۶۰ \times ۲۴}$ استعمال کریں تو

$$\frac{۲}{\text{ث}} = \frac{۹۰ \times ۲۲}{۳۶۶۵۵ \times ۲۶۰ \times ۲۴} = ۰.۰۲۳ \text{ تقریباً}$$

جو انتہائی قیمت ۲۲۴ سے کم ہے اس کثافت اور اس زاویائی رفتار کے لئے دو کرہ نمائی اشکال ممکن ہیں کیونکہ $\frac{۲}{\text{ث}}$ کی دو حقیقی قیمتیں ملتی ہیں جیسا کہ دفعہ (۱۸۱) میں واضح کر دیا گیا ہے۔ بڑی قیمت ایک بہت چپے کرہ نما کے متناظر ہے اور چھوٹی قیمت سے ایک ایسا کرہ نما حاصل ہوتا ہے جس کی پللیجیت دفعہ (۱۸۹) کی رو سے ہے

$$\frac{۱}{۲۳۲} = \frac{۱۵}{۸} \times ۰.۰۲۳ = ۰.۰۴۳ \text{ تقریباً}$$

علم مساحت الارض سے ہم جانتے ہیں کہ زمین اپنی شکل میں ایک کرہ سے بہت ہی کم فرق رکھتی ہے کیونکہ اس کی پللیجیت $\frac{۱}{۲۴۹۱۵}$ ہے یعنی کرہ نما

ملے دیکھو انسائیکلو پیڈیا ری ٹابیکا میں (A R Clarke) اور (F R Helmet) کا

مضمون (Figure of the Earth)

کے محوروں میں نسبت $۳۰۰/۱۵ : ۲۹۹/۱۵$ ہے۔
 اب یہ واقعہ کہ متجانس سیال کے ایک کرہ نما کے محورس کی کثافت میں کی اوسط
 کثافت کے مساوی اور جس کی گردش کا وقت زمین کی گردش کے وقت کے مساوی
 ہو $۲۳۳۲ : ۲۳۳۲$ کی نسبت رکھتے ہیں یہ بتاتا ہے کہ یہ بالکل خارج از امکان
 ہے کہ زمین اپنے دور حیات میں کسی وقت ایک متجانس سیال کی کثافت تھی۔
 ۱۹۱۔ البوترا کرہ نما ممکن شکل نہیں۔ یہ معلوم رہے کہ ہم نے امانی توازن
 کی حالت میں گھومنے والے سیال کی شکل کے عام مسئلہ کو حل نہیں کیا ہے بلکہ
 صرف یہ دکھایا ہے کہ اگر $۲۲/۲$ ث > ۲۲۲۴ تو جیسے کرہ نما ممکن شکل
 ہے اور ہم دیکھے ہیں کہ یہ نتیجہ سیال کی مقدار کثافت پر منحصر نہیں بلکہ صرف
 کثافت اور زاویہ رفتار پر منحصر ہے۔ اگر $۲۲/۲$ ث < ۲۲۲۴ تو اس سے
 یہ نتیجہ نہیں نکلتا کہ توازن ناممکن ہے بلکہ صرف یہ کہ اس صورت میں جیسے کرہ نما
 کی شکل ممکن نہیں ہے۔
 اب یہ معلوم کرنے کے لئے کہ آیا البوترا کرہ نما ممکن شکل ہے یا نہیں ہم دفعہ (۱۸)
 میں لہ کی بجائے لہ لکھتے ہیں جہاں نہ ہونا چاہیے > ۱۸ اُس دفعہ
 کی (ع) اور (ج) مساواتوں سے

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 + 1)(n^2 + 4)} = \frac{1}{2}$$

جو ناممکن ہے کیونکہ مساوات کے طرفین مختلف العلامت ہیں۔ پس البوترا
 کرہ نما توازن کی ممکن شکل نہیں ہو سکتا۔

۱۹۲۔ پائسن نے (Tom II p 547) یہ بتایا ہے کہ بیرونی قوتوں کے زیر عمل ساکن
 سیال کی مساوی دباؤ کی سطحوں اور ایسے سیال کی مساوی دباؤ کی سطحوں کے درمیان
 سروری فرق ہونا ہی چاہیے وراث کی ایک دوسرے کو جذب کرنے والی قوتوں کے
 زیر عمل ساکن ہے یا ان کے زیر عمل ثامت محور کے گرد یکساں رفتار سے

گھوم رہا ہے۔

فرض کرو کہ Δ ب ج آزاد سطح اور Δ ع ف مساوی دباؤ کی کوئی سطح ہے تب پہلی صورت میں Δ ع ف کے کسی نقطہ پر کی حاصل قوت اس نقطہ پر سطح کے عمود وار ہے اور Δ ب ج اور Δ ع ف کے درمیانی سیال کے وجود سے غیر متاثر رہتی ہے۔ اس لئے اگر اس سیال کو نکال دیا جائے تو اس سیال کے توازن پر کسی قسم کا اثر نہیں پڑیگا جو Δ ع ف سے محذو ہے۔ دوسری صورت میں Δ ع ف کے کسی نقطہ پر کی قوت اگر یہ کہ اس نقطہ پر سطح کے عمود وار ہے لیکن Δ ع ف کے اندرونی سیال کی کثیت کی اور Δ ع ف اور Δ ب ج کے درمیانی سیال کی کثیت کی کششوں کا حاصل ہے، حاصل قوت کے ان دو اجزاء ترکیبی کا سطح کے عمود وار ہونا ضروری نہیں اور عام طور پر Δ ع ف کے اندرونی سیال کو بقیہ سیال کے توازن پر اثر ڈالے بغیر علیحدہ نہیں کیا جاسکتا۔

لیکن اگر سیال متبائن ہو اور ذرات کلیہ نیوٹن کے بموجب ایک دوسرے کو جذب کرتے ہوں اس طرح کہ آزاد سطح کرہ نما ہو تو مساوی دباؤ کی سطحیں متشابه کرہ نما ہوں گی اور ایسی صورت میں چونکہ دو ہم مرکز متشابه اور متشابه واقع ناقص نماؤں سے گھرے ہوئے ناقص نمائی خول کی حاصل کشش اس کے اندرونی نقطہ پر صفر ہوتی ہے اس لئے Δ ب ج اور Δ ع ف کے درمیانی سیال کو علیحدہ کیا جاسکتا ہے بشرطیکہ گردش کی رفتار غیر متغیر رہے۔

مزید براں ہم نے دفعہ (۱۸۸) میں یہ دیکھا ہے کہ سید کی کسی سی بوئی قیمت کے لئے جو ایک معینہ حد سے تجاوز نہیں کرتی دو کرہ نما اشکال ممکن ہیں۔ فرض کرو کہ آزاد سطح Δ ب ج ان میں سے ایک شکل اختیار کرتی ہے۔ سیالی کثیت کے اندر ایک ہم مرکز کرہ نما گھگھکیچو جو دوسرے کرہ نما کے متشابه ہو۔ تب Δ ب ج اور گھگھ کے درمیانی سیال کو سیالی کثیت گھگھ پر کسی قسم کا اثر ڈالے بغیر علیحدہ کیا جاسکتا ہے۔

سطح گھگھ کے نقطہ نیر کے ذرہ پر خول کا عمل نقطہ نیر پر سطح کے عمود وار نہیں ہے لیکن یہ عمل، کثیت گھگھ کی کشش اور غرض قوت

سمتہ کے ساتھ ملکر نقطہ ن پر اس کرہ نما کے عمود وار ہے جو نقطہ ن سے گزرتا ہے اور سطح ا ب ج کے ہم مرکز اور متناہ ہے۔

دوسرے الفاظ میں سطح کے ایک درہ کا وزن اس مساوی دما کی سطح کے عماد کی سمت میں عمل کرتا ہے اور کسی اندرونی درہ کی صورت میں اس مساوی دما کی سطح کے عماد کی سمت میں عمل کرتا ہے جو درہ میں سے گزرتی ہے۔

اسی طرح اگر آدھی سطح ا ب ج کی شکل ممکن اشکال میں سے ایک ہو تو ہم یہ تپاس کر سکتے ہیں کہ عالم کا ایک ہم مرکز خول کیت کے ساتھ جوڑ دیا گیا ہے جس کی بیرونی سطح اسی شکل کی ہے جسے ا ب ج یا درہ کی شکل کی سطح ہے۔

پہلی صورت میں ا ب ج مساوی دما کی سطح بھی ہوگی لیکن دوسری صورت میں ا ب ج مساوی دما کی سطح نہیں ہوگی۔ کیونکہ مساوی دما کی سطحیں بیرونی سطح کے متناہ اور متناہ واقع ہوگی۔

۱۹۴۴ — اگر سیال کی کچھ کیت اپنے مرکز قتل میں سے گزرنے والے ایک محور کے گرد ایک ایسی زاویہ رفتار سے گھمادی جائے کہ سمتہ ۲۲ ڈیگری کی قیمت دفعہ (۱۸۸) میں حاصل شدہ حد سے متجاوز نہ ہو تو اس سے یہ مستنبط نہیں ہوتا کہ سیال کرہ نما کی شکل میں متوازن نہیں ہو سکتا کیونکہ یہ تپاس کیا جاسکتا ہے کہ کیت اطراف میں بلحاظ محور کے پھیل جائیگی اور زیادہ چھٹی صورت اختیار کرے گی حتیٰ کہ اس کی زاویہ رفتار اس قدر گھٹ جائے کہ کرہ نما شکل کا امکان ہو جائے۔

اگر کیت سیال کال یہ متناہ ہو تو اس کی شکل توازن کے کرہ نما شکل میں سے ہتزاز کر سکتی لیکن اگر کیت تمام معلوم سیالوں کی صورت میں ہو جائے، ذرات کے انسانی مٹاؤ سے رگڑ پیدا ہو نہ ہتزازات بدرجہ گھٹنے جائیں گے اور بالآخر توازن کا ایک شکل روم ہوگا۔ اب یہ اصول استعمال کر کے کہ کل نظام کا زاویہ معیار حرکت بلحاظ محور کے مستقل رہیگا ہم اہم اتہائی زاویہ رفتار اور اختار کرہ اہم اتہائی شکل معلوم کر سکتے ہیں۔

عام سوال یہ سخت کرنے کے لئے فرض کرو کہ سیال کی کیت کو کسی طرح حرکت دیا گیا ہے اور پھر اسکو اپنی حالت پر چھوڑ دیا گیا ہے تو کیت کا مرکز یا توازن ہوگا یا یکساں

رفتار سے ایک خط مستقیم میں حرکت کر گیا۔ اس حرکت میں محور کرنا ہو گا جو کمیت کے مرکز کے لحاظ سے ہے۔

کمیت کے مرکز میں سے ایک ایسا مستوی کھینچو جس کی سمت میں زائدی معیار حرکت اعظم ہے۔ تب یہ مستوی جبکہ معیاری مستوی کہا جاسکتا ہے ثابت رہے گا خواہ حرکت کا بعد میں سیال کے ذرات ایک دوسرے پر کسی طرح کا عمل کریں اور جب ذرات کی اضافی حرکت اُن کی باہمی رگڑ سے فنا ہو جائیگی تو اضافی توازن کی حالت میں اس مستوی پر کا عمود وار محور سال کی کمیت کا گردش کا محور رہو گا۔ فرض کرو کہ نظام کا دیا ہوا زائدی معیار حرکت h ہے اور بالآخر اسکی زائدی رفتار h ہے۔

(۲۰۶)

توازن کے کردہ فنا کے محوروں کو ج اور ج ۱ + ل ۱ سے اور کمیت کو ک سے تعبیر کریں تو زائدی معیار حرکت کے لئے $\frac{1}{2}k$ ج ۱ + ل ۱ سے حاصل ہوگا۔

$$\therefore \frac{1}{2}k \text{ ج } 1 + l_1 = h$$

$$\text{نیز } \frac{h}{2} \pi \text{ ث ج } 1 + l_1 = k$$

ان دو مساواتوں اور مساوات

$$\frac{h}{2} \pi \text{ ث } = \frac{h}{2} \pi \text{ ث } (1 + l_1) = \frac{h}{2} \pi \text{ ث } (1 + l_1) \dots \dots \text{ دفعہ (۱۹۸)}$$

سے ج ۱ سے، اور ل کی قیمتیں دریافت کیجا سکتی ہیں۔ پہلی دو مساواتوں سے

$$\frac{h}{2} \pi \text{ ث } = \frac{h}{2} \pi \text{ ث } (1 + l_1) \dots \dots \frac{h}{2} \pi \text{ ث } = \frac{h}{2} \pi \text{ ث } (1 + l_1)$$

$$\frac{h}{2} \pi \text{ ث } (1 + l_1) = \frac{h}{2} \pi \text{ ث } (1 + l_1) \dots \dots \frac{h}{2} \pi \text{ ث } (1 + l_1) = \frac{h}{2} \pi \text{ ث } (1 + l_1)$$

جس سے ل کی قیمتیں ہو جاتی ہے۔

اس مساوات کی ہمیشہ ایک اصل وجود کہتی ہے کیونکہ داہنی طرف کا جملہ

لہ کے ساتھ صفر اور لا تباہی ہوتا ہے۔ اس لئے اس کو ایک ایسی قیمت اختیار کر لی جاسیے جو سزاورہ کے درمیان لہ کی کسی خاص قیمت کے لئے بائیں طرف لے مثبت متقل کے مساوی ہو۔ مزید برآں یہ بتایا جاسکتا ہے کہ اس مساوات کی صرف ایک اصل مثبت ہے کیونکہ یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ وہی طرف کے ملا کا متعلق ہمیتہ مثبت ہے۔ اس لئے ہ اور گ کو دی ہوں متعدد میں سمجھ لہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ ایک اور صرف ایک کرنا شکل ہوگی جس کی طرف اجتہاد کرنے والا سیال مسلسل داخل ہوتا جائیگا

Mécanique Céleste, Tome, II

یہ سمت لہ بلا اس کی کتاب

Système du Monde, Tome II

کے صفحہ ۱۰۱ میں پاسی کو لان کی

Mécanique Céleste Tome, II

کے صفحہ ۴۰۹ میں اور لہ کی

کے صفحہ ۹۶ میں مل سکیگی۔

۱۹۴ — جیو بی کا تعلق نمبر — جیو بی نے یہ روایت کیا کہ زمین میرٹھ سا ہی محوروں والا نامس مانگھوسے والے مانع کی کیت کے لئے اصالی توازن کی ممکن شکل ہے۔

جسکے نی کے ساتھ کا حسب ذیل توت

(Laplace)

Journal de l'Ecole Polytechnique,

سے لیا گیا ہے۔ نو

Tome XIV میں شائع ہوا۔

آتش کے محور کو پوری لیکر فرض کرو (اگر ممکن ہو) کہ مانع کی سطح اس شکل کی ہے جو مساوات

$$r = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \quad (1)$$

— حاصل دتی ہے۔

تب اگر مانع کی کیت سک ہو تو سطح کے لفظ (لا، ما، ی) پر کے خدو یہ کی مائل سمتیں علی الترتیب (لا، ب، ما، اور ج) ہیں۔ جہاں

$$ا = \frac{مک}{ج} \int \frac{ع^۲ فرع}{(۱ + ل^۲ ع^۲) ه}$$

$$ب = \frac{مک}{ج} \int \frac{ع^۲ فرع}{(۱ + ل^۲ ع^۲) ه}$$

$$ج = \frac{مک}{ج} \int \frac{ع^۲ فرع}{ه}$$

جن میں ہر جملہ

$$\sqrt{(۱ + ل^۲ ع^۲)(۱ + ل^۲ ع^۲)}$$

کو تغیر کرتا ہے۔

آزاد سطح کی تفرقی مساوات ہے

$$(ا - ل - س^۲ ل) (س^۲ ل + ل) + (ب - ا - س^۲ ل) (س^۲ ل + ل) + ج = ۰$$

اور اسلئے اگر آزاد سطح ناقص ما (۱) ہو تو

$$(۱ - س^۲ ل) (س^۲ ل + ل) = (ب - ا - س^۲ ل) (س^۲ ل + ل) = ج = (۲)$$

س^۲ ل کو ساکت کرنے سے

$$(ا + ل) (ل + ل) (ا - ب) = ج (ل - ل)$$

اور 'ا'، 'ب'، 'ج' کی قیمتیں اس میں مندرج کرنے سے یہ

$$(ا + ل) (ل + ل) (ا - ب) = ج (ل - ل) = \frac{ع^۲ فرع}{ه} \int (ل - ل) = \frac{ع^۲ فرع}{ه} \int (ل - ل)$$

Mécanique C. leste, Tome, II ,

Cours de Mécanique

Statics, Vol II, p 306

نوٹ متعلقہ صفحہ (۱۰) دیکھو

ڈھیل (Duhame) کی

یا مینچن (Minchin) کی

میں تحویل ہو جاتا ہے۔
 حل لہ = لہ کو جس سے چپا کر نہ حاصل ہوتا ہے مسترد کر کے اقسام کو
 داہنی طرف منتقل کرنے سے

$$\frac{26(1-26)(1-26)26}{36} = \dots \dots \dots (3)$$

اس مساوات سے لہ کی تین ہوتی ہے جبکہ لہ معلوم ہو۔
 لہ کو مثبت قیمت دینے سے مساوات کی داہنی طرف کا جملہ مثبت
 ہوگا اگر لہ = ۰ اور منفی اگر لہ = ∞ پس لہ کی ایک قیمت مثبت ہوگی جو
 مساوات کو پورا کرے گی۔

مزید راس مساواتوں (۲) کی رو سے

$$سہ = ۱ - \frac{ج}{لہ + ۱}$$

$$(4) \quad \frac{36(1-26)(1-26)26}{36(1+1)(1+1)} =$$

اور اسلئے سہ ایک مثبت مقدار ہے۔

(۲۰۸) پس اس کی پوری طرح تحقیق ہو گئی کہ تین غیر مساوی محوروں والا ناقص نما
 آزاد سطح کی ممکن شکل ہے جس کے تینوں محور غیر مساوی ہیں اور سب سے چھوٹا
 محور گردش کے محور پر منطبق ہوتا ہے۔

مساوات (۳) سے یہ ظاہر ہے کہ لہ لازماً < ۱ اور نہ مشکل شکل
 کی پوری دست میں مثبت ہوگا اور اس لئے معدوم نہ ہو سکے گا۔ اس لئے
 لہ یا لہ لازماً < ۱

اور اس لئے / ر ج یا ب / ر ج ۲۴ سے بڑا ہونا چاہیے۔ اس لئے
 جیکو بی ناقص نما کی دونوں پیتیں چھوٹی نہیں ہو سکتیں۔

۱۹۵۔ سطح پر جاذبہ کا حاصل عمل قوتوں (ا - سہ) (ب - سہ) اور جی کا حاصل ہے اور اس لئے اس عمود کے بالعکس متناسب ہے جو مرکز سے ماسی مستوی پر کھینچا جائے۔

نیز اندرونی ذرہ پر مانع کی کششوں (لا، ب، ا، اور ج) کو ذہن میں رکھ کر اور لیپ نیز کے مسئلہ سے استفادہ کر کے یہ آسانی ثابت ہو جاتا ہے کہ کسی مرکزی مستوی تراش پر کا حاصل زور اس مستوی کے عمود وار اور اس کے رقبہ کے متناسب ہے۔

۱۹۶۔ مسٹر آؤ ہٹرنے اس طرف توجہ دلائی ہے اور حسب دلیل طریقہ پر اس کی تشریح کی ہے کہ گھومنے والے ناقص نما کا اضافی توازن برقرار نہیں رہ سکتا جبکہ گردش کا محور صدی محور پر منطبق نہ ہو۔

صدی محور کے لحاظ سے فرض کرو کہ گردش کے محور کی سمتی جیوب التمام ل، م، ن ہیں کیت کا کوئی نقطہ (لا، ا، ی) ہے اور ل اس عمود کا پایہ ہے جو مرکز سے محور پر کھینچا گیا ہے۔

تب $ول = ل + م + ن$ ی
اور اگر $ول = ۰$ تول کے محدود ہیں ل، م، ن
اسراع سہ ل کو محوروں کے متوازی تحلیل کیا جائے تو اجزائے تحلیل حاصل ہوتے ہیں

سہ (لا - ل، ۰) سہ (ا - م، ۰) سہ (ی - ن، ۰)
اس لئے آزاد سطح کی تفرقی مساوات ہے

{سہ (لا - ل، ۰) - {لا} فرا + {سہ (ا - م، ۰) - {ب} فرا + {سہ (ی - ن، ۰) - {ج} فرا -
پس آزاد سطح کی شکل، مساوات

سہ (لا + ا، ی) - سہ (ل + م + ن، ۰) - {لا - ب، ا، ج، ی} = مستقل سے
حاصل ہوتی ہے اور یہ مساوات صدی محوروں کے لحاظ سے ایک ناقص نما کو

تبدیل نہیں کر سکتی جب تک کہ l ، m ، n میں سے دو مقداریں معدوم نہ ہو جائیں۔

(۲۰۹)

سنٹر گرین بل نے یہ بیان کیا ہے کہ گردش کے محور کے سرے پر مانع کا ذرہ صرف مانع کی کشش کے زیر عمل ساکن رہے گا کیونکہ اس نقطہ پر جلد سے m معدوم ہو جائے گا۔ پس ذرہ برقی کشش سطح کے عماد کی سمت میں ہونی چاہیے جو صرف محور کے سرے کی صورت میں درست ہے۔

۱۹۶ — جیکوبی کے مسئلہ کا حسب ذیل ثبوت اسے — اسمتھ نے ۱۸۳۸ء میں (The C Mathematical Journal) کی پہلی جلد صفحہ ۹۰

میں دیا ہے۔

اگر مانع کی کچھ کیت اسٹوایجم کے مانند زاویائی رفتار سے m سے محوری کے گرد گھومے اور اگر نقطہ (l, m, n) پر کشش کے اجزاء ترکیبی l, m, n سے ہوں تو آزاد سطح کی مساوات ہوگی

$$(l - m) + (m - n) + (n - l) = 0$$

اب اگر آزاد سطح ناقص بنا ہو تو

$$l = m = n$$

جہاں (l, m, n) مختصر نہیں ہیں l, m, n پر۔

پس اگر l, m, n ناقص بنا کے نصف محور ہوں تو مساواتوں

$$(l - m) + (m - n) + (n - l) = 0$$

$$\frac{l}{a} + \frac{m}{b} + \frac{n}{c} = 0$$

کو بشرط امکان متطابق کرتا ہے۔ اس لئے مساواتیں

$$(l - m) + (m - n) + (n - l) = 0$$

پوری ہونی چاہئیں جن سے l اور m کو ساٹھ کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{و}^{\text{ا}}\text{ب}^{\text{ا}} (\text{ب} - \text{ا}) - (\text{و}^{\text{ا}} - \text{ب}^{\text{ا}}) \text{ج}^{\text{ا}} = 0 \dots\dots (ع)$$

$$\text{ا ب اگر } > \{ (\text{و}^{\text{ا}} + \text{و}^{\text{ا}}) (\text{ب}^{\text{ا}} + \text{و}^{\text{ا}}) (\text{ج}^{\text{ا}} + \text{و}^{\text{ا}}) \}^{\frac{1}{3}}$$

اور اگر مانع کی کیت ک ہو تو

$$\text{ا} = \frac{\text{و}^{\text{ا}} \text{ج}^{\text{ا}}}{(\text{و}^{\text{ا}} + \text{و}^{\text{ا}}) >} \text{ب} = \frac{\text{و}^{\text{ا}} \text{ج}^{\text{ا}}}{(\text{و}^{\text{ا}} + \text{و}^{\text{ا}}) >}$$

$$\text{ج} = \frac{\text{و}^{\text{ا}} \text{ج}^{\text{ا}}}{(\text{و}^{\text{ا}} + \text{و}^{\text{ا}}) >}$$

تب مساوات (ع) ہو جاتی ہے

$$(\text{و}^{\text{ا}} - \text{ب}^{\text{ا}}) \text{ج}^{\text{ا}} > \left\{ \frac{\text{و}^{\text{ا}} \text{ج}^{\text{ا}}}{\text{و}^{\text{ا}} + \text{و}^{\text{ا}}} - \frac{\text{و}^{\text{ا}} \text{ب}^{\text{ا}}}{(\text{و}^{\text{ا}} + \text{و}^{\text{ا}}) (\text{ب}^{\text{ا}} + \text{و}^{\text{ا}})} \right\} \text{و}^{\text{ا}} \text{ج}^{\text{ا}} = 0$$

اگر و، ب سے مختلف ہو تو محوروں کے درمیان جو ربط ہے اُس سے مساوات

(۲۱۰)

$$\text{ج}^{\text{ا}} \text{و}^{\text{ا}} > \left(\frac{1}{\text{و}^{\text{ا}}} + \frac{1}{\text{ب}^{\text{ا}}} - \frac{1}{\text{ج}^{\text{ا}}} + \frac{1}{\text{و}^{\text{ا}} \text{ب}^{\text{ا}}} \right) = 0 \dots\dots (ب)$$

پوری ہونی چاہیے۔

اگر و اور ب معلوم ہوں تو اس مساوات سے ج کا تین ہو جاتا ہے

اور چونکہ داہنی طرف کا جملہ منفی ہے جبکہ ج = 0 اور مثبت ہے جبکہ ج = ∞

اس لئے ج کی ایک قیمت حقیقی ہونی چاہیے جو مساوات بالا کو پورا کرے۔

چونکہ $\frac{2}{6}$ مثبت ہے اور چونکہ

$$\frac{1}{\text{و}^{\text{ا}}} + \frac{1}{\text{ب}^{\text{ا}}} - \frac{1}{\text{ج}^{\text{ا}}} + \frac{1}{\text{و}^{\text{ا}} \text{ب}^{\text{ا}}}$$

مثبت ہے اگر و کافی بڑا ہو اس لئے نتیجہ نکلتا ہے کہ جب و چھوٹا ہو تو یہ آخری

جملہ منفی ہونا چاہیے۔

پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{c}$$

اور اس لئے مقادیر a اور b میں سے جو مقدار چھوٹی ہے اُس سے c چھوٹا ہے۔
زاویائی رفتار معلوم کرنے کے لئے ہم حالتے میں کہ

$$s^2 = (a^2 - b^2)$$

$$= \frac{6}{(a^2 - b^2)(6 + a^2)}$$

اور اس لئے اگر a b سے مختلف ہے تو

$$s^2 = \frac{6}{(a^2 - b^2)(6 + a^2)} \quad (ج)$$

اور چونکہ یہ جملہ ایک مثبت مقدار ہے اس لئے s^2 کی ایک ممکن قیمت حاصل ہوتی ہے اور یہ ثابت ہو گیا کہ ناقص بنا، آزاد سطح کی ایک ممکن شکل ہے جبکہ اس ناقص بنا کے تینوں محور غیر مساوی ہوں اور ناقص بنا سب سے چھوٹے محور کے گرو گھوم رہا ہے۔

۹۸ — c کا سب سے چھوٹا محور ہونا اس طرح بھی ظاہر ہے

$$s^2 = \frac{6}{(c^2 - a^2)(6 + c^2)}$$

$$= \frac{6}{(c^2 - a^2)(6 + c^2)} \left\{ \frac{c^2}{6 + c^2} - \frac{a^2}{6 + a^2} \right\}$$

$$= \frac{6}{(c^2 - a^2)(6 + c^2)} \left\{ \frac{c^2}{6 + c^2} - \frac{a^2}{6 + a^2} \right\}$$

جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ s^2 کے حقیقی ہونے کے لئے یہ ضروری ہے کہ $c > a$ اور

اسی طرح ج > ب -

۱۹۹ — ہم دیکھتے ہیں کہ دفعہ ۱۹۴ میں (۱) ب، ج کے لئے جو جملے
دئے گئے ہیں وہ ان جملوں میں تحویل ہو سکتے ہیں جو دفعہ (۱۹۴) میں مندرج
ہیں اگر (۱) کی بجائے ج (۱ + ۱) (۱) ب کی بجائے ج (۱ + ۱) (۱) اور ج (۱ + ۱) + ۶
کی بجائے ج (۱ + ۱) لکھا جائے اس طرح دفعہ (۱۹۴) کی مساواتیں (ب) (ج) (ج)
وہی ہیں جو دفعہ (۱۹۴) کی مساواتیں (۳) اور (۴) ہیں۔ اگر سیال کی کثیت
ک دی جائے تو ایک اور مساوات $\frac{1}{2} \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho \frac{d}{dt} \right)$ حاصل ہوتی
ہے۔ اس مساوات اور دفعہ (۱۹۴) کی مساواتوں (ب) (ج) سے (۱) ب، ج،
کاتین ک، ٹ اور سہ کی رقوم میں ہو سکتا ہے۔

ان مساواتوں کو سی۔ او۔ ٹیئر (C O Mayer) نے دریافت کیا
اور ٹیئرینڈ (Tisserand) کی کتاب *Traite de Mecanique*

Celeste Tome II کے باب ہفتم میں بھی ان کی پوری تشریح موجود ہے جس میں یہ
بتایا گیا ہے کہ $\frac{1}{2} \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho \frac{d}{dt} \right)$ ٹ کی اعظم قیمت ۱۸۴۰۹ ہے جو جیکوبی ناقص نما کو
توازن کی ایک ممکن شکل بناتی ہے اور اس خاص قیمت کے لئے ناقص نما ایک
گردشی ناقص نما ہے جو میٹارن کے ایک کرہ نما پر منطبق ہوتا ہے۔ مزید برآں
یہ بھی بتایا گیا ہے کہ دفعہ (۱۹۴) کی مساوات (ج) کے بائیں جانب کا تفاعل
اس قیمت سے ایک یگانہ قیمت اعظم اختیار کرتا ہے اور اس سے چھوٹی قیمتوں
کے لئے ایک اور مرتبہ ایک ناقص نما حاصل ہوتا ہے۔
میٹارن کے کرہ نماؤں اور جیکوبی کے ناقص نماؤں سے متعلق نتیجوں کا خلاصہ اس طرح
لکھ سکتے ہیں :-

اگر $\frac{1}{2} \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho \frac{d}{dt} \right) < ۲۲۴۴$ تو کوئی کرہ نما یا ناقص نما نہیں

۱۰ *Crelle's Journal*, Tome XXIV (1842)

۱۱ اس تشریح کے علاوہ کے لئے دیکھو *Traite de Mecanique Rationnelle*, Tome

اگر ۲۲۴۷ د \leq $۲۲/۱۸۷۰۹$ ت \leq ۱۸۷۰۹ د تو د چپے کرہ نما،
اگر ۱۸۷۰۹ د \leq $۲۲/۱۸۷۰۹$ ت \leq ۱۸۷۰۹ د تو د چپے کرہ نما اور ایک ناقص نما
جس کے تیزوں محاور غیر مساوی۔

۲۰۰۔ ہم نے دفعہ (۱۹۴) میں دیکھا ہے کہ جیکوبی کے ناقص نما کی درجہ اولیٰ جیسے
چھوٹی نہیں ہو سکتیں۔ درحقیقت ایک محور بر صورت میں گردش کے محور کا کم از کم ۲۲
گنا ہے۔ جیکوبی کے ناقص نماؤں پر تفصیلی بحث کرنے ہوئے آخر میں عددی جداول اور
اشکال شامل ہیں ڈارون یہ بتاتا ہے کہ ناقص نما جیسے نما ہوتا عیناً ویسے، اس کے
گھومنے کی رفتار سست پڑتی جائے گی اور جب زاویائی رفتار مسلسل گھٹتی رہاتی ہے
تو معیار حرکت کا معیار مسلسل بڑھتا جاتا ہے اس لیے یہ بھی بتایا ہے کہ لمبے ناقص نما
تقریباً گردش کے ناقص نما میں جن کے گردش کا محور گھومنے کے محور پر علی القواعد ہے
۲۰۱۔ ناقصی اسطوانہ۔ ہم یہ بھی ثابت کر سکتے ہیں کہ اطری ٹو۔ پیرمتھالس
تجاذبی اائع کی لامتناہی کیت کی سطح کی ایک ممکنہ حل ناقصی اسطوانہ ہے حکماً اائع متوازن
جسم کے مانند اسطوانے کے محور کے گرد گھوم رہا ہو۔

اگر ۱ اور ۲ ہم خود ہوں تو کسی اندرونی نقطہ (لا، ما) پر کشش کے اثر اس
ترکیبی ہیں

$$\frac{۲۲ ت ب لا}{۱ + ب} \text{ اور } \frac{۲۲ ت ب لا}{۱ + ب}$$

(کیلول اور ٹیٹ، دفعہ ۴۹) اور اسلئے آزاد سطح کی مسادات ہے

$$\left(\frac{۲۲ ت ب}{۱ + ب} - سہ \right) لا فر لا + \left(\frac{۲۲ ت ب}{۱ + ب} - سہ \right) ما مرا =$$

اس مسادات کو

۱۷ دیکھو 'On Jacobi's Figure of Equilibrium for a rotating mass of fluid'

Proc Royal Soc Vol XLI (1887) p 319, or Scientific Papers,

Vol III p 119

$$= \frac{\text{لا فرلا}}{\text{ب}} + \frac{\text{لا فرلا}}{\text{ب}}$$

کے ساتھ متماثل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{سہ} = ۲ = ۴ \text{ ث } ۱ \text{ ب} / (۱ + ۱)$$

اس سے سہ کی تعین ہوتی ہے اگر ث، ۱، ب دے گئے ہیں۔ لیکن اگر سہ، ث دے جائیں تو چونکہ

$$\frac{۱ - \text{ب}}{\text{ب}} = \sqrt{۱ - \frac{\text{سہ}^۲}{۴}}$$

اس لئے ہمیں ہر طور پر توازن کی ممکن شکل نہیں ہوگا سوائے اُس صورت کے جبکہ
 $\text{سہ} > ۲$ ث -

۲۰۲۔ یوانکارے کا مسئلہ۔ ہم نے یہ دیکھا ہے کہ جب کوئی کما قس نہا، اصنافی توازن کی ایک ناممکن شکل ہوتا ہے اگر

$$\text{سہ} / ۲ \text{ ث} < ۱۸۶۰.۹$$

ایک چنیا کرہ مانا ممکن شکل ہوتا ہے اگر سہ / ۲ ث < ۲۲۴۷ اور ایک نانی سہ طوائف ناممکن شکل اگر سہ / ۲ ث < ۵۔ یوانکارے نے ثابت کیا کہ اگر سہ / ۲ ث < ۱ تو توازن کی کوئی شکل ممکن نہیں ہے۔ کیونکہ توازن کی ایک ضروری شرط یہ ہے کہ آزاد سطح کے ہر نقطہ پر کشش اور مرکز گریز قوت کے حاصل کی سمت اندرونی جانب ہو ورنہ ایک حصہ جدا ہو جائے گا۔ فرض کرو کہ تجاذبی قوتوں کا قوتہ فہ ہے اور محور سے فاصلہ ر ہے اور فرض کرو کہ

$$۶ = ف + \frac{۱}{۲} س^۲$$

(۲۱۳)

بیرونی جانب حاصل عادی قوت $\frac{جف}{جفت}$ ہے اور توازن کے لئے
آزاد سطح کے ہر نقطہ پر $\frac{جف}{جفت}$ منفی ہوا چاہیے مگر اس کے مسئلہ سے

$$\frac{جف}{جفت} فرس = \frac{ل}{۲} = فرلا فرما فری$$

جہاں پہلا مکمل سطح پر اور دوسرا سیال کے کل حجم کے اندر لیا گیا ہے۔ اور

$$ل = ۶ = ل + ف + س^۲ = -۲ - ۲ + ۲ = ۲$$

$$اس لئے \frac{جف}{جفت} فرس = ۲ (س^۲ - ۲) = ۲ (۲ - ۲) = ۰$$

اور اگر $س^۲ < ۲$ ت تو داہنی جانب کا جملہ مثبت ہے جس کے یہ معنی ہیں کہ سطح
کے چند نقطوں پر حاصل قوت کی سمت بیرونی جانب ہے اور اس لئے توازن ناممکن ہے۔
۲۰۳ — توازن کی اور شکلیں۔ ان اس کال کے علاوہ جن پر
ہم نے غور کیا ہے حلقہ نما (Annulus) پر سب سے پہلے لاپلاس نے غور کیا
جس کا تعلق زحل کے چہلوں سے ہے اور اس وقت سے اس مضمون پر بہت سی تحقیقات
ہو چکی ہے۔

کیلون اور ٹیٹ کی (Natural Philosophy) طبع دوم کے دفعہ ۸۷۷
میں نتجوں کی ایک تعداد جو مذکورہ بالا اشکال کی قائمیت سے متعلق ہیں بغیر ثبوت

$$ل = ۶ = ل + ف + س^۲$$

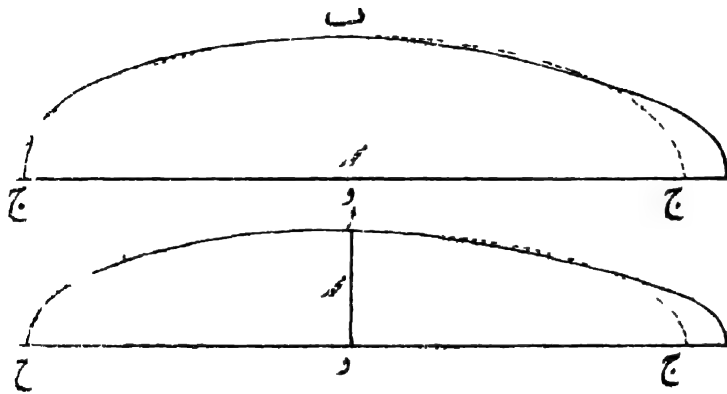
ل (Mecanique Celeste, Tome II p 155) نیز (Tisserand) کی

(Mecanique Celeste) جلد دوم کے اجواب نہم، دہم، دوازدہم دیکھو جن میں لاپلاس

کیرک میکول، اور (Mme Kowalewsk) کی تحقیقاتوں پر بحث
کی گئی ہے۔

کے درج کی گئی تھی۔ ان نتیجوں کو قائم کرنے کی کوشش میں یوہانکارے نے ایک مشہور و مقبول مقالہ لکھا جو ۱۸۸۵ء میں (Stockholm) میں شائع ہوا۔ اس مقالہ میں توازن کی شکل کے مسئلہ پر زیادہ عام طریقہ سے بحث کی گئی ہے۔ اس میں بتایا گیا ہے کہ توازن کی ممکنہ اشکال قطعی سلسلہ بناتی ہیں یعنی ایسا سلسلہ جو ایک تنہا تبدیل پر منحصر ہوتا ہے، مثلاً زاویائی رقبہ پر اور ایسا کہ تبدیل کی ہر قیمت کے جواب میں ایک اور صرف ایک شکل یا اشکال کی ایک محدود تعداد حاصل ہوتی ہے اور ہر اشکال ایک مسلسل طریقہ سے بدلتی ہیں جب کہ تبدیل بدلا جاتا ہے۔ اس طرح میکلا رن کے کہنا ایک قطعی سلسلہ بناتے ہیں اور جیکوبی کے ناقص نامادوسرا۔ یہ ہو سکتا ہے کہ ایک ہی شکل دو مختلف سلسلوں سے تعلق رکھے۔ اس طرح کی شکل دو شاخگی کی ایک صورت ہے۔ مثلاً کونٹوں کے سلسلہ کا ایک خاص رکن ایسا ہے جو جیکوبی کے ناقص ہونا کے سلسلہ سے تعلق رکھتا ہے۔ یوہانکارے نے اس مقالہ میں توازن کی اشکال کی قاسمیت کے مسئلہ پر بھی بحث کی ہے اور یہ بتایا ہے کہ اگر اشکال کا ایک سلسلہ دو شاخگی کی شکل کی حد تک قائم ہو تو اس نقطہ کے بعد اشکال غیر قائم ہوجاتی ہیں۔ قائم اشکال اب دوسرے سلسلہ سے متعلق ہوجاتی ہیں جو دو شاخگی کی شکل میں شامل ہوتا ہے۔ اس طرح میکلا رن کا کہنا اس وقت تک قائم ہوتا ہے جب تک کہ انکلا خروج المرکز ۸۱۲۷ سے کم ہو جو دو شاخگی کا نقطہ ہے اور اس نقطہ سے جیکوبی کے ناقص ہونا قائم ہو جائے ہیں۔ جیکوبی کے ناقص ہوناؤں کے سلسلہ میں دو شاخگی کے نقطہ (Lame) کے تفاعلوں کی مدد سے معلوم کرنے کی کوشش میں یوہانکارے نے دریافت کیا کہ توازن کی اشکال کے سلسلوں کی تعداد لامتناہی ہے تمام اشکال لمبعاظ ایک مستوی کے جو گردش کے محور پر عمودوار ہوتا ہے متشکل ہوتی ہیں۔ تمام اشکال کم از کم ایک متشکل کامستوی رکھتی ہیں جو محور میں سے گزرتا ہے اور ان میں سے بعض گردشیں اشکال ہیں۔ ان اشکال میں صرف ایک قائم ہوتی ہے اور اس صورت میں تفاعل کے صرف دو مستوی ہوتے ہیں۔ یہ وہ شکل ہے جو جیکوبی کے ناقص ہوناؤں کے سلسلہ میں پہلی دو شاخگی سے پیدا ہوتی ہے اور ان کو توازن کی ناسپاتی متشکل کہا گیا ہے

کیونکہ پوائسلا کے مقالہ میں جو شکل کھینچی گئی ہے وہ ناسپاتی کے متشابه ہے۔ مرید تحقیقات سے معلوم ہوا کہ شکل ناسپاتی سے اتنی مشابہت نہیں رکھتی جتنی کہ پہلے فرض کی گئی تھی۔ ڈارون نے اس پر دو مقالات میں بحث کی ہے اور دوسرے تقریباً اس کی شکل کا تعین کیا ہے۔ دو شاخوں کے نقطہ پر بیکیوبی ناقص نما کے محوروں میں نسبت $۶۵۰۶۶ : ۸۱۴۹۸ : ۱۹۵۸۳$ ہے اور $۲/۲۲$ ٹ = ۱۴۲۰ اور ناسپاتی نما شکل جیکوبی کے اس ناقص نما سے وراسا صرف رکھتی ہے



جو اپنے سب سے لمبے محور کے ایک سرے پر ابھرا ہوا اور دوسرے پر گنڈ ہوتا ہے۔

See also p 347, also *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, p 161
 "On the pear shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid," *Phil Trans* Vol. 198 A (1901), p 391 or *scientific papers*, Vol III p 288 and "The stability of the pear shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid," *Phil Trans* Vol 200 A (1902), p 251, or *Scientific Papers* Vol III p 317

ان اشکال کی تائید برائیک ملیس اور دچمپ مصنون *The Genesis of Double Stars*

میں بہت آسان بحث کی گئی ہے۔ یہ مصنف *Darwin and Modern Science* کے

باب ہست و ہشتم میں اسی مصنف کا لکھا ہوا ہے۔

اشکال بالا میں جن کو بالا جازت متذکرہ صدر ڈاروں کے دوسرے مقالہ سے لیا گیا ہے نقطہ وار خط جیکو بی ناقص ناکو تعمیر کرتا ہے اور دوسرا مغنی ناسپاتی ناشکل کو۔ اوپر والی شکل استوائی تراش اور پچلی نصف النہاری تراش ہے تشاغل کے مستوی میں۔

۲۰۴۔ جھوٹی ایللیجیبتوں کے ٹھوس متجانس ناقص ناک کی کشش کے لئے حسب ذیل جملے گھونسنے والے مانع کی کمیتوں کی اختیار کردہ اشکال کی بحث میں اگر مفید ثابت ہوتے ہیں یعنی اگر، ب، ج نیم محور ہوں ایسے کہ ب = (۱ - ص) اور ج = (۱ - ش) تو کسی اندرونی نقطہ (لا، ما، ی) پر کشش کے اجزائے ترکیبی ہیں

ا، ث، لا، ب، ث، ا، ج، ث، ی

جہاں

$$ا = \frac{۲}{۳} \pi (۱ - \frac{۲}{۵} ص - \frac{۲}{۵} ش)$$

$$ب = \frac{۲}{۳} \pi (۱ + \frac{۲}{۵} ص - \frac{۲}{۵} ش)$$

$$ج = \frac{۲}{۳} \pi (۱ - \frac{۲}{۵} ص + \frac{۲}{۵} ش)$$

ان جملوں کو متشاکل صورت میں اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے

$$ا = \frac{۲}{۳} \pi (۱ - \frac{۲}{۵} ب - \frac{۲}{۵} ج) \quad \text{دیگر}$$

$$ب = \frac{۲}{۳} \pi (۱ - \frac{۲}{۵} ج - \frac{۲}{۵} ا) \quad \text{یا اس طرح} \quad ، \quad \text{دیگر}$$

$$ک = \frac{۱}{۳} \pi (ا + ب + ج) \quad \text{جہاں}$$

۲۰۵۔ مثال۔ متجانس مانع کی کمیت ک اور ک کمیت کا ایک دور کہا ہوا کرہ اضافی توازن میں اپنے مرکز ثقل کے گرد چھوٹی یکساں زاوی زئارسہ سے گھوم رہے ہیں۔ ثابت کر دو کہ مانع کی آزاد سطح صغیر ایللیجیبتوں کا ناقص ناک ہے جس کا سب سے

$$\begin{aligned} & \text{ثانی الذکر} \frac{\text{مہک}}{۱۰} \text{ کے ساتھ مل کر} \\ & \frac{\text{مہک}}{۲} - \frac{\text{مہک ف}}{(ف+۲-۲-۲) \text{ فرجم طہ}} = \\ & \frac{\text{مہک}}{۱۰} = \left\{ ۱ + \frac{۱۳}{۱۰} \text{ فرجم طہ} - ۱ \right\} \\ & = \frac{۳ \text{ مہک فرجم طہ}}{۲} \end{aligned}$$

و ا کے متوازی -
اگر ہم ناقص نمائی شکل ان لیس اور و ا کو محور لا اور گردش کے محور کو محوری
قرار دیں تو

$$\begin{aligned} \text{فجی} = \text{سہ} (\text{لا فرلا} + \text{افرا}) - (\text{اٹ لا فرلا} - \text{بٹ افرا} - \text{ج ٹ ی فری}) \\ - \frac{\text{یک}}{۲} \text{ فر} + \frac{۳ \text{ مہک لا}}{۳} \text{ فرلا} \end{aligned}$$

اور آزاد سطح کی شکل ہونی چاہیے

$$\begin{aligned} & \text{لا} (\text{سہ} - \text{اٹ} + \frac{۳ \text{ مہک}}{۲} - \frac{\text{مہک}}{۳}) + \text{ما} (\text{سہ} - \text{بٹ} - \frac{\text{مہک}}{۳}) \\ & - \text{ی} (\text{جٹ} + \frac{\text{مہک}}{۲}) = \text{مستقل} \\ & \therefore \text{لا} (\text{اٹ} - \frac{۲ \text{ مہک}}{۳} - \text{سہ}) = \text{ب} (\text{بٹ} + \frac{\text{مہک}}{۳} - \text{سہ}) \\ & = \text{ع} (\text{جٹ} + \frac{\text{مہک}}{۳}) \end{aligned}$$

اب چونکہ کیتیں اپنے مرکز نقل ث کے گرد زائوی رفتار سے گھوم رہی ہیں

$$\therefore \text{سہ} \times \text{وٹ} = \frac{\text{مہک}}{۲}$$

لیکن (ک+ک) وٹ = ک ف

$$\frac{-(ک+ک)}{ک} = سٹ$$

$$۱۔ باب = سٹ \left\{ (۱) (ک+ک) - (۱) (ک+ک) \right\}$$

$$\frac{سٹ}{ک+ک} =$$

کیونکہ سٹ/ت اور ۱-ب چھوٹے ہیں۔

$$اسی طرح ۱-ج = سٹ \left\{ (۱) (ک+ک) - (۱) (ک+ک) \right\}$$

$$\frac{سٹ}{ک+ک} =$$

لیکن دفعہ گزشتہ سے

$$(۲۱۰) ۱۔ باب = سٹ \left\{ (۱) (ک+ک) - (۱) (ک+ک) \right\} + \frac{۱}{۵} (۱) (ک+ک) - \frac{۱}{۵} (۱) (ک+ک)$$

$$= سٹ (۱) (ک+ک) - (۱) (ک+ک) + \frac{۱}{۵} (۱) (ک+ک) - \frac{۱}{۵} (۱) (ک+ک)$$

اور صغیر فرق ۱-ب کے پہلے رتہ تک صحیح نتیجہ حاصل کرنے کے لئے ہم آری حروف ضمیمی میں کہ ۱-ب = ۱-ج رکھ سکتے ہیں۔ اس طرح

$$۱۔ باب = سٹ (۱) (ک+ک) - (۱) (ک+ک)$$

$$اسی طرح ۱-ج = سٹ (۱) (ک+ک) - (۱) (ک+ک)$$

$$پس ۱-ج = سٹ (۱) (ک+ک) - (۱) (ک+ک)$$

اشکلہ

۱۔۔۔ نصف قطر کا ایک چلا کر دی خول ٹ کثافت کے تجاذبی مانع سے عین بھرا ہوا نہیں ہے۔ اگر مانع اصفانی تو دن میں ایک قطر کے گرد زادی رفتار سے گھوم رہا ہو تو ثابت کرو کہ گردش کے محور کے علی اقوام خول ہ جو بڑا دائرہ ہے اس کے کسی نقطہ پر سطح دائرہ کی علی اقوام سمب میں تاؤ سے دائرہ کے مساوی ہے۔

۲۔۔۔ ایک استوار کر دی خول تجاذبی سیال سے عین بھر دیا گیا ہے۔ یہ ایک مرکزہ ہے جو ایک دوسرے ملے سیال کے خول سے گھرا ہوا ہے۔ کل نظام کو ایک قطر کے گرد گھمایا گیا۔ ثابت کرو کہ ایک چٹا کرہ مناسط فاصل کی ممکن شکل ہے۔

۳۔۔۔ ایک استوار کر دی خول میں دو مائعات ہیں جو آمیز نہیں ہوتے اور کل نظام استوار جسم کی مانند خول کے مرکز میں سے گزرنے والے ایک محور کے گرد گھومتا ہے۔ سب سے بڑی زاوی زقار معلوم کرو جس کے لئے مشترک سطح کر دی ہو جائے اور خول کو مس یہ کرے اور ثابت کرو کہ جب زاوی زقار اس قیمت سے متجاوز ہوتی تو کرہ نما کا خروج مرکز خول کے نصف قطر پر محکم نہیں ہوتا۔

۴۔۔۔ ث کثافت کے مانع کی کچھ کبیت ٹ کثافت کے مانع کی کچھ کبیت سے گھری ہوئی ہے اور کل کبیت یوری طرح ایک غلاف میں بھر جاتی ہے جسکی شکل صغیر بللیجیت صہ کا ایک چٹا کرہ نما ہے۔ اگر غلاف اپٹ محور کے گرد میہ زادی رفتار سے گھومے تو ثابت کرو کہ مشترک سطح کی ممکن شکل صغیر بللیجیت کا ایک چٹا کرہ نما ہے جہاں صہ

$$۱۵ \text{ سہ } / ۱۶ = \text{ صہ } \text{ ٹ } + \text{ پٹ } (\text{ صہ } - \text{ صہ }) \text{ ٹ}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

۵۔۔۔ ایک غلاف صغیر بللیجیت صہ کے ایک لمبوترے کرہ نما کی شکل میں ہے۔ اس کو ٹ + ٹ کثافت کے ایک سیالی مرکزہ اور اس کے گرد ٹ کثافت کے سیال سے بھر دیا گیا۔ اگر یہ اپنے محور کے گرد زادی رفتار (۸ ٹ صہ) سے

سے گھومے تو ثابت کرو کہ مشترک سطح کی ممکن شکل ایک کرہ ہے۔

۶ — ث کثافت کے متجانبش مانع کی کچھ کیفیت ایک غلاف کو بھر دیجی ہت

جسکی شکل ناقص نما لا/ہ + ۱/۲ با + ۱/۲ ج = ۱ ہے، یہ غلاف استوار جسم کی

ماند خط لا/لی = ما/م = ی/ن کے گرد یکساں زاوی رقتار سد سے گھومتا

ہے مگر مرکز پر کا دباؤ سطح پر کے کسی نقطہ پر کے دباؤ سے قدر ۱/۲ ل ث کے زیادہ ہو اور یہ اضافہ بڑے سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ

$$۰ = \frac{۲ن}{\frac{۱}{سد} - \frac{۱}{ج - ل/۲}} + \frac{۲م}{\frac{۱}{سد} - \frac{۱}{ب - ل/۲}} + \frac{۲ی}{\frac{۱}{سد} - \frac{۱}{لا/۲}}$$

جہاں لا، ب، ج، کسی اندرونی نقطہ پر کی کشش کے اجزاء ترکیبی ہیں۔

۷ — ایک یکساں کرہ جو معمولی تجاذبی مادے سے بنایا گیا ہے اور جسکا نصف

قطر لا ہے جہوئی یکساں زاوی رقتار سے دور کے ایک قوت کے مرکز کے گرد ایک

دائرہ مرتقم کرتا ہے۔ مرکزی قوت فاصلے کے مربع کے بالعکس متناسب ہے۔

اگر کرہ کو پوری طرح پانی سے ڈھاپ دیا جائے اور پانی کی بر خود کشش نظر انداز

کر دی جائے تو ثابت کرو کہ پانی کا حجم

$$۱۰ ۲۱۰ سد ۱/۲ ج ۳$$

سے بڑا ہونا چاہیئے جہاں ج کرہ کی سطح پر جاذبہ ارض کی قوت ہے۔

۸ — دو تجاذبی امانات آمیز نہیں ہوتے اور جن کی کثافتیں ث، ث (ث کے ث)

ہیں ایک استوار کرہ کی فضا میں بند ہیں اور کل نظام اضافی توازن میں کرے

کے ایک قطر کے گرد صغیر یکساں زاوی رقتار سد سے گھومتا ہے ثابت کرو کہ

ان دو مانوں کی مشترک سطح کی ممکن شکل ایک چٹا کرہ ہے جس کی ایلجیٹ ۱۵ سد/

۲ (ث + ۲/ث) ہے۔

۹۔۔۔ اوسط نصف قطر کا ایک لا متناہی متجانس اسطوانہ θ کثافت کے متجانسائع کی کیت سے گھرا ہوا ہے۔ اسطوانہ کی کثافت θ اور اس کی صغیر بللیجیت حد ہے کل نظام اصنافی توازن میں خود اپنی کشش کے زیر عمل محور کے گرد یکساں زاویائی رفتار سے گھومتا ہے۔ اگر آزاد سطح کا اوسط نصف قطر ہو تو ثابت کر دو کہ آزاد سطح کی ممکن شکل ایک ناقصی اسطوانہ ہے جسکی صغیر بللیجیت ہے

$$\pi (a^2 - b^2) / (a^2 + b^2) \text{ (ث - ث)} \quad (a^2 + b^2) \text{ ث - ث} \quad (a^2 + b^2) \text{ ث - ث}$$

۱۰۔۔۔ θ کثافت کے جاذب سیال کی دی ہوئی کیت اصنافی توازن میں زاویائی رفتار سے ساتھ اس طرح گھوم سکتی ہے کہ اس کی آزاد سطح ناقص نما کی شکل میں ہے جس کے تینوں محاور غیر مساوی ہیں اور سب سے بڑا نیم محور ہے۔ اب اس شکل کا ایک استوار بنایا گیا ہے اور اس کے اندرونی سیال کو ظرف کے ساتھ اصنافی توازن کی حالت میں سب سے چھوٹے محور کے گرد زاویائی رفتار سے گھمایا گیا ہے ثابت کر دو کہ سطح کے کسی نقطہ پر کا دیا ہے

$$\frac{1}{2} \theta (a^2 - b^2) \text{ (ث - ث)} \quad \frac{1}{2} \theta (a^2 - b^2) \text{ (ث - ث)} \quad \frac{1}{2} \theta (a^2 - b^2) \text{ (ث - ث)}$$

بوجب اس کے کہ θ سے بڑا یا چھوٹا ہو۔

۱۱۔۔۔ اوسط کثافت θ کا ایک ٹھوس کرہ یکساں کثافت θ کے مائع کی ایک بتلی چادر سے لپیٹ دیا گیا ہے کل نظام کرہ کے مرکز میں سے گزرنے والے محور کے گرد صغیر یکساں زاویائی رفتار سے گھومتا ہے۔ ٹھوس کرہ معکوس مربع کے قانون کی بوجب اس طرح جذب کرتا ہے گویا کہ اس کا مادہ محور کے ایک نقطہ پر منبج ہے جسکا مرکز سے فاصلہ ج چھوٹا ہے۔ مائع بھی معکوس مربع کے قانون کے بوجب جذب کرتا ہے۔ ثابت کر دو کہ مائع کی بیردنی سطح تقریباً ایک کرہ نما ہے جس کی بللیجیت $15\pi / 8 \text{ (ث - ث)}$ ہے اور

جسکا مرکز کرہ کے مرکز سے $\theta / (a^2 - b^2)$ فاصلہ برداق ہے۔

متفرق مثالیں

(۲۲۰)

۱۔ پیکلہ سیال کی کچھ مقدار جس کے اجزاء ایک دوسرے کو بموجب قانون قدرت جذب کرنے ہیں ایک گڑھ میں بھر عانی ہے جس کے مرکز پر ایک مرکزی قوت

میں موجود ہے۔ کرہ کا نصف قطر ج اور سیال کی کمیت (۲ کم - مہ) ج ہے جہاں

ثابت کہ $d =$ ثابت کرو کہ توازن کی شرطیں یوں ہی ہوتی ہیں اگر تھ، راکے بالکس متناسب ہو۔

۲۔ ایک کرہ (نصف قطر ص) پانی سے عین بھرا ہوا ہے اور انتہائی محور کے گرد زارائی رفتار سے کے ساتھ گھومتا ہے اس طرح کہ ص سے $d = ۲$ ج۔ ثابت کرو کہ مساوی دباؤ کی جو سطح کرہ کو علی التوا تم قطع کرتی ہے اس میں دباؤ $d = ۳$ ج ث $۴/۳$ ہے جہاں ث پانی کی کثافت ہے۔

۳۔ مانع کی کچھ کمیت تین محدودوں کے مستویوں کے درمیان واقع ہے ان مستویوں میں سے ہر ایک ایسی قوت سے مانع کو جذب کرتا ہے جو فاصلے کے متناسب ہے اور کشش کی مطلق قوتیں مہ، مہ، مہ سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔ ایک نصف ناقص مانع اس طرح ثابت کر دیا گیا ہے کہ اس کا مستوی رخ ایک مستوی پر واقع ہے اور اس کی سطح دو مستویوں کو مس کرتی ہے اس کے محور محدودوں کے محوروں کے متوازی ہیں اور

مہ، مہ، مہ

کے بالکس متناسب ہیں۔

اگر ناقص نما کو ڈھانچے دینے کے لئے سیال ناکافی ہو تو غیر ڈھانچا ہوا حصہ ایک دائرہ سے محدود ہوگا۔

۴۔ مانع کی کچھ کمیت اپنے ذرات کے باہمی جذب کے مانع ہے اور ایک دھاتی قوت مانع کے مرکز میں سے گزرے والے ایک مستوی سے سرے ہٹانے کا اثر رکھتی ہے اور ایسے بدلتی ہے جیسے اس مستوی سے عمودی فاصلہ۔

ثلث کے راس ب تک پہنچ جائے۔

(۲۲۱) اگر ثلث کے رقبہ کو کم سے کم کر دیا جائے اس طور پر کہ پانی کی دی موٹی گہرائی کے لئے قائمیت برقرار رہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{سس ج} = \frac{\text{راس}^2 + ۲ \text{س} + ۹}{\text{س} - ۳}$$

$$\text{سس ا} = \frac{\text{راس}^2 + ۲ \text{س} + ۹}{\text{س} - ۱}$$

جہاں بند کی کثافت نوعی س ہے۔

۱۰۔ سیال کی کچھ کثیت ایسی خود کشش کے زیر عمل توازن میں ہے ثابت کرو کہ کسی نقطہ (لا، ا، ی) پر کا دباؤ اس مساوات

$$\text{جف} \left(\frac{۱}{\text{جف لا}} \right) + \text{جف} \left(\frac{۱}{\text{جف ا}} \right) + \text{جف} \left(\frac{۱}{\text{جف ی}} \right) = ۲۴ \text{ ن}$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں ن نقطہ (لا، ا، ی) پر کی کثافت ہے۔

سیال کی لاتنا ہی کثیت (ایسی کہ دے کہ ن جہاں کہ مستقل ہے) ایک استوار کروی خول کو گھیرے ہوئے ہے اور خود اپنی کشش کے زیر عمل توازن میں ہے لاتنا ہی پر دباؤ ۳ ہے۔ کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم کرو۔

۱۱۔ کششوں کا ایک بل، ایک ستوی استوار راستے (ب کو افقی محل میں تھا متا ہے اگر ایک چھوٹا متحرک بوجھ نقطہ گ رکھا جائے تو بل یکساں طور پر نیچے دتا ہے۔ جب بوجھ نقطہ ج پر رکھا جاتا ہے تو سراسر اپنے محل میں غیر متغیر رہتا ہے، جب نقطہ د پر تو سراسر اپنے محل میں غیر متغیر رہتا ہے، اور جب نقطہ ن پر تو راستہ کا نقطہ ق اپنے محل میں غیر متغیر رہتا ہے۔

ثابت کرو کہ $\text{اگ} \times \text{گج} = \text{بگ} \times \text{گد} = \text{نگ} \times \text{گق}$

اور یہ کہ نقطہ ن پر کے ایک بوجھ سے نقطہ م پر جو انحراف پیدا ہوتا ہے وہ اس انحراف کے مساوی ہے جو اسی بوجھ کو نقطہ م پر رکھنے سے ن پر پیدا ہوتا ہے۔

۱۲۔ ایک پائیل میں سید پتیرا ہے اور اس کے اندر پانی ہے۔ اس کی شکل معلوم کرو اور اس کا نقشہ کھینچو جب دونوں مائعات کی سطحوں کا فرق اغراق کے تمام درجوں کے لئے وہی ہو۔

۱۳۔ کسی شکل کے ظرف میں کچھ مائع ہے اور اسکو مختلف شکل کے دوسرے ظرف میں بہنے دیا جاتا ہے۔ اگر علی القوائم محدودوں کے لحاظ سے جو ظرف پر منحصر ہیں (یعنی نقطہ لا، ما، می) پر کسی ظرف میں دباؤ نہ ہو تو $\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2}$ کی دو نوں فیضوں کے درمیان فرق اس کام سے جو مائع نے اور دالے ظرف سے پچھلے ظرف میں بہانے میں کیا ہے اس قدر فرق رکھتا ہے جو اس کام کے مساوی ہے جو پچھلے ظرف میں سیال کی سطح کو اسی اتنی مستوی پر لانے میں درکار ہوتا ہے جو اوپر والے ظرف میں سیال کی ابتدائی سطح تھی۔

۱۴۔ گردشی مکانی نما کی شکل کے ایک ظرف میں کچھ سیال ہے جو مکانی نما کے انتصابی محور کے گرد گھوم رہا ہے۔ اوئی رفتار معلوم کرو جبکہ $\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2}$ میں ڈھلکنا شروع کرے۔ اور ثابت کرو کہ اگر یہ زاویہ زخمار $\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2}$ ہو تو ظرف سیال پر نصف بھرا ہوا ہونا چاہیے۔

اگر مکانی نما گردشی نہ ہو بلکہ $\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2}$ کی شکل کا ہو اور محور (می) انتصابی ہو اور اگر سیال کی سطح جس مغنی کپڑت کو ملتی ہے اس کے اعظم اور اقل ارتفاع می، می ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho_3} - \frac{1}{\rho_4} \quad (1 - 2)$$

جہاں دونوں مکانی نماؤں کے ماسوں کے درمیان فاصلہ ک ہے۔
۱۵۔ ایک اسطوانی ظرف خواص انتصابی محور کے ساتھ اس طرح لٹکایا گیا ہے کہ پانی ظرف کے نصف حصہ تک چڑھ جاتا ہے۔ ظرف کی اوپر کی سطح کے مرکز سے اس کے مرکز ثقل کا اقل فاصلہ معلوم کرو جو اس شرط کے مطابق ہو کہ توازن محور کے زاوی ہٹاؤ کے لحاظ سے قائم ہو سکے۔

(۲۲۲)

۱۶۔ بے پیماسیال، توڑوں

$$\frac{ملا}{۱} - \frac{میرا}{۲} - \frac{ری}{۳}$$

کے زیر حمل ساکن ہے جو علی الترتیب محوروں کے متوازی ہیں۔ ایک ذرہ جس کی کثافت سیال کی کثافت سے کم ہے سطح

$$\frac{۱}{۱} + \frac{۲}{۲} + \frac{۳}{۳} = ۱$$

میں کسی جگہ رکھ دیا گیا ہے۔ مزاحمت نظر انداز کر کے ثابت کر دو کہ ذرہ کی رفتار سطح (جسکی تھیں مقدار ک سے ہوتی ہے) سے گزرتے وقت ایسے بڑھتی ہے جیسے

ماکت۔ ک۔

۱۷۔ ایک پیکر اگر دی لغاذ توازن کی حالت میں ہے جبکہ اس میں کردہ ہوائی کے دو چند کثافت کی ہوا ہے اور اس کا نصف قطر قدرتی نصف قطر کا دو چہرہ ہے۔ اگر بار پیماسیال کا ارتفاع $\frac{۱}{۲}$ اینچ اتر جائے تو لغاذ کے ناپ میں صغیرا ہتھنراز کا وقت دریافت کر دو۔

۱۸۔ ایک قائم مخروط ایک طرف میں جکے اندر دو دئے ہوئے سیالوں کی گہرائیاں مساوی ہیں اس طرح ٹکا ہوا ہے کہ اس کا محور انتہائی ہے اور اسکا راس طرف کی تہ کے ساتھ بانڈ دیا گیا ہے۔ قائم توازن کی شرط معلوم کر دو۔

۱۹۔ ایک سیدھا عیسایاں ڈنڈا ایسے مادہ پر مشتمل ہے جس کی کشش (فاصلہ) کے متناسب ہے۔ اس کے گرد ساکن سیال ہے جو صرف اس کی کشش کے ماتحت ہے۔ ثابت کر دو کہ مساوی دباؤ کی سطحوں کی نصف النہاری متوازیوں کی تفریق مساوات اس شکل

$$\frac{فرما}{فرلا} = سا + کوک \frac{۱}{ر}$$

میں رکھی جاسکتی ہے جہاں ڈنڈے کے سروں سے نقطہ (لا،) کے فاصلے ر، ت ہیں اور ڈنڈے کے محاذی اس نقطہ پر زاویہ سا بنتا ہے۔

۲۰۔ مکانی نما کا ایک حصہ، وتر خاص m و n ایک مستوی سے جو اس سے m و n فاصلہ پر محور پر عمود وار ہونے کا ثابت کیا گیا ہے۔ اگر مکانی نما کا راس ایک مانع کی سطح کے نیچے $\frac{m}{n}$ و گہرائی پر ثابت کر دیا جائے تو ثابت کرو کہ یہ ساکن رہے گا ایسے کہ اس کا ماسک مانع کی سطح میں ہوگا اگر مانع کی کثافت کو مکانی نما کی کثافت سے نسبت $29:232$ ہو۔

۲۱۔ سیال کی کچھ گیت (ک) ایک ثابت محور کے گرد چمٹی ہوئی مستقل زاویہ رفتار کے ساتھ گھومتی ہے اور محور کے ایک نقطہ کی طرف دی ہوئی قوت سے جذب ہوتی ہے جو فاصلہ کے تناسب سے۔ سیال کی کثافت کسی نقطہ پر ایک دی ہوئی مستقل مقدار اور ایک ایسی مقدار کا مجموعہ ہے جو اس نقطہ پر کے دباؤ سے دی ہوئی مستقل ثبوت رکھتی ہے۔ آزاد سطح کی شکل معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اس کا اقل نصف قطر (ب) اس مساوات

$$k = m \cdot \frac{h}{g} \cdot \frac{1}{r} \quad \text{یا} \quad \frac{h}{r} = \frac{g}{m \cdot k}$$

سے متعین ہوتا ہے جہاں m اور g مستقل ہیں۔

۲۲۔ ایک دافع قوت فاصلے کے مربع کے بالعکس متناسب ہے اور اس کا مرکز ایک متجانس بے پچک سیال کی آزاد سطح کے نیچے واقع ہے۔ یہ سیال ساکن ہے اور جاذبہ ارض کے زیر عمل بھی ہے قوت کی شدت اس نقطہ پر جو سیال کی آزاد سطح میں قوت کے مرکز سے انتصافاً اوپر واقع ہے جاذبہ ارض کی شدت کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ سیال کی بیرونی سطح ایک افقی متعارف مستوی رکھتی ہے اور قوت کا مرکز ایک اندرونی جوف سے محصور ہے جس کی چوٹی سیال کی بیرونی سطح میں ہے۔ جوف کا حجم اس کے طول کے رقوم میں معلوم کرو۔

۲۳۔ مربع قاعدے کے ایک قائم منشور کے ساتھ دوسرا منشور جس کا قاعدہ بھی مربع ہے چپکا دیا گیا ہے اس طرح کہ ان کے محور منطبق ہیں اور اضلاع متوازی۔ یہ کل نظام ایک سیال میں اس طرح قیرتا ہے کہ ان کا مشترک مستوی تیراؤ کے مستوی میں ہے۔ اگر منشوروں کے قاعدوں کے اضلاع $2:1$ کی نسبت میں ہوں تو

(۲۲۳)

ان کے انتہائی ارتفاع معلوم کرو تا کہ توازن قائم ہو سکے۔
 ۲۴۔ ایک وزنی مکعب ایک ایسے محور کے گرد حرکت کر سکتا ہے جو ایک رخ کے مقابل صناعتوں میں سے گزرتا اور ان کی تنصیف کرتا ہے۔ اس محور کو انتہائی طور پر ایک خالی طرف میں ثابت کر دیا گیا ہے اس طرح کہ مکعب توازن کے محل میں ٹہما ہوا ہے۔ کس گہرائی تک سیال کو ظرف بن ڈالا جائے کہ توازن غیر قائم ہو جائے۔ مکعب اور سیال کی کثافتوں کی بڑی سے بڑی نسبت معلوم کرو کہ یہ ممکن ہو سکے۔

یہ فرض کر کے کہ مکعب نصف غرق ہے اور توازن قائم ہے، یہ صغیر امتحان کا وقت معلوم کرو۔

۲۵۔ ایک اسطوانہ جس کا محور انتہائی ہے ایک سیال میں تیر رہا ہے جس میں کسی نقطہ پر ایک کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کی کن دیں تو اسے توازن کو اتنا نیچے دبا دیا گیا ہے کہ اس کا اوپر والا رخ سیال کی سطح پر عین منطبق ہوتا ہے اور تب اسطوانہ کو چھوڑ دیجئے پھر اسطوانہ سیال کے عین باہر اٹھ آتا ہے۔ ثابت کرو کہ جب اسطوانہ تیر رہتا تو غرق شدہ گہرائی کو اسطوانہ کے ارتفاع سے دسی نسبت میں توازن کو (۲۰) $\frac{1}{10}$ سے ہے۔

۲۶۔ ایک یکساں گردش میں مکانی فنا کا ارتفاع ف اور وتر خاص لی ہے۔ اس کی کثافت استانی بلحاظ اس سیال کے جس میں یہ تیر رہا ہے۔ یہ ثابت کرو کہ غرق شدہ اس کے ساتھ توازن کا صرف ایک محل یقیناً ہوگا اگر

$$۲ (۲ - ۳) > ۳$$

۲۷۔ رقیق مادہ کا ایک ظرف گردش میں مکانی فنا کی شکل کا ہے اور اس میں مائع سے ثابت کرو کہ توازن ہمیشہ قائم ہوگا بشرطیکہ اندرونی سیال کی کثافت بیرونی سیال کی کثافت سے بڑی ہو۔ ظرف کا وزن نظر انداز کر دیا گیا ہے۔

۲۸۔ ایک ناقص مخروط انتہائی محور کے ساتھ ایک مائع میں جسکی کثافت اسکی

کناف کا دو چند ہے تیرا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا اگر

$$ف^2 > \frac{(ا-ب)^2}{۱-۴} ، جہاں م = \frac{\frac{۱}{۲}(ا+ب)^2}{\frac{۱}{۳}(ا+ب)^2}$$

جہاں ناقص مخروط کا ارتفاع ف اور اسکے رخوں کے نصف قطر اب ہیں۔
نیز ناقص مخروط افقی محور کے ساتھ تیرا ہو تو توازن قائم ہوگا اگر

$$ف^2 < \frac{۳(ا+ب)^2}{۲(ا+ب)^2 + ۲(ا+ب)^2}$$

۲۹۔ مکعب کی شکل کے ایک خرٹ میں مانے ہوئے مکعب کا ضلع ۱۲ ہے۔
اس کو نصف قطر کے ایک کمال کمرے سے ثابت کر کے سر پر اس طرح رکھ دیا
گیا ہے کہ وہ ٹکرا رہے۔ خرٹ کے وزن کو نظر انداز کر کے ثابت کرو کہ اگر انتصابی
رخوں کے متوازی مستویوں میں ہٹاؤ پیدا کئے جائیں تو توازن قائم ہوگا بشرطیکہ
مانع کی گہرائی ۴ اور ۶ کے درمیان ہو۔

۳۰۔ ایک متساوی الساقین مثلثی پتہ جس کے اضلاع اب، ج، مساوی
ہیں ایک مانع میں جس کی کناف گہرائی کے متناسب ہے نیچے وار راس کے
ساتھ تیرتا ہے۔ اگر اد، ب ج پر عمود ہو اور اگر پتہ اس طرح تیر سکتا ہو کہ خط اد
انتصابی سمت سے زاویہ ط بنائے تو ثابت کرو کہ ط اس مساوات

$$۸۱ \sin^2 \theta = ۶۴ \cos^2 \theta \quad (\text{جب } \theta = ۲۷^\circ)$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ جہاں زاویہ ب ج، ۲۷° ہے اور پتہ کی کناف ۱۲،
اور اب یا ج کے مساوی گہرائی پر مانع کی کناف ۱۲ ہے۔

۳۱۔ ایک گردنشی محکم انتصابی محور کے ساتھ تیرتا ہے۔ اس کے محور کے
ایک ثابت نقطہ پر اوزان رکھ کر اس کو مختلف گہرائیوں تک ڈبویا گیا طے کی شکل معلوم
کر د اگر توازن ہمیشہ تبدیل رہے۔ (۲۲۲)

۳۲۔ اگر ایک جسم سکون میں تیرے تو ثابت کرو کہ کسی ہٹاؤ کے لئے سیال کی

ایسے مستوی سے کاٹ لیا جائے جو اسکے محور پر عمود وار ہے اور اگر اسکو نیچے وار
 راس کے ساتھ ائغ میں غرق کر کے ایک چھوٹے زاویہ میں بہرا دیا جائے تو اسے واوی معیار
 کہتے ہوئے حصہ کی مقدار پر منحصر نہیں ہوتا۔ ثابت کرو کہ اگر $\alpha = 90^\circ$ (لا) تلوینی
 منحنی ہو تو ف کو معین کرنیوالی مساوات ہے

$$[ن(لا)] = [ث] + [ف(لا)] + [ب(لا)] + [ن(لا)] + [ت(لا)] + [ا]$$

جہاں مجسم کی کثافت بلحاظ سیال کے θ ہے۔
 ۳۶۔ نصف قطر کے ٹھوس نیم کرہ سے ایک حصہ علیحدہ کر لیا گیا ہے یہ حصہ قائم
 اسطوانہ کی شکل کا ہے جس کا ارتفاع θ ہے اور جس کا محور کرہ کا محور اور جس کے قاعدہ
 کا مرکز کرہ کا مرکز ہے۔ کرہ کے اس حصہ میں ایک پتلی نلی رکھی گئی ہے جو اس میں
 ٹھیک بیٹھ جاتی ہے۔ پھر اس کو نیچے وار راس کے ساتھ ایک سیال میں رکھ کر
 نلی میں θ کثافت کا سیال ڈالا گیا ہے۔ معلوم کرو کہ کس قدر سیال اس میں
 ڈالا جائے کہ توازن تبدیل ہو جائے۔ اگر نلی میں θ ارتفاع تک سیال
 داخل کیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\theta}{\theta} = \frac{\theta - \theta}{\theta}$$

جہاں ٹھوس جسم کی کثافت θ ہے۔

۳۷۔ ایک جسم متغیر کثافت کے ائغ میں تیر رہا ہے۔ اس کے محل میں ذرا سی
 تبدیلی کر دی گئی ہے اس طرح پرکہ ہٹائے ہوئے ائغ کی کمیت غیر متبدل رہتی ہے۔
 اگر نئی گہرائی پر کثافت θ (ی) ہو اور جسم کی غرق شدہ سطح میں کے کسی نقطہ
 کے محدود (لا، لا، ی) ہوں جبکہ سطح کو حوالے کا مستوی لا فرض کیا جائے
 تو ثابت کرو کہ تیراؤ کے مستوی میں کا وہ نقطہ جسکے گرد جسم گھومتا ہے اس مستوی
 کا مرکز ثقل ہے جسکو ایک پتھر کے مانند خیال کیا گیا ہے جسکی کثافت
 نقطہ لا، لا، ی (ی) ہے۔

(۲۲۵)

۳۸۔ ایک پالہ کی بیرونی سطح لی وتر خاص کا ایک مکانی مناس ہے اور

اسکی موٹائی اتنی ہست میں ہر نقطہ پر ایک ہی ہے اور بقابل کے بہت چھوٹی ہے۔ یہ پیالہ راس کے اوپر ارتفاع پر دائری کورر کہتا ہے اور نصف قطر کے ایک کرہ کے بلند ترین نقطہ پر لٹکا ہوا ہے۔ اگر اس میں اتنا پانی ڈالا جائے کہ اس کی سطح پیالہ کے محور کو راس سے $\frac{1}{2}$ فاصلہ پر قطع کرے اور اگر پانی کا وزن پیالے کے وزن کا چار گنا ہو تو ثابت کر دو کہ توازن قائم ہوگا اگر

$$\frac{r}{r_2} > \frac{r_1}{r_2 + r_1}$$

۳۹ — ایک متساوی اساقین مثلثی پتہ ۱ ب ج ساکن ہے اس طرح کہ اس کا مستوی انتصابی ہے اور راس ج مانع کی سطح کے نیچے گ گہرائی پر ثابت ہے۔ مانع کی کثافت گہرائی کے متناسب ہے۔ اگر پتہ سے کی کثافت اسی ہو جتنی کہ مانع کی کثافت گہرائی دیر ہے اور مثلث کا ارتفاع ف، سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ ط بنا ہے تو ثابت کر دو کہ

$$d = \frac{1}{2} \text{ جم}^2 (\text{ط} + \text{ع}) = \frac{1}{2} \text{ جم}^2 (\text{ط} - \text{ع}) = \frac{1}{2} \text{ جم}^2 \text{ ع جم ط}$$

جہاں زاویہ ج ب = $\frac{1}{2} \text{ ط} - \frac{1}{2} \text{ ع}$ ۔

۴۰ — $\frac{1}{2}$ ارتفاع اور نصف قطر کے محور اسطوانہ کے اندر پانی ہے اور اسطوانے کے سرے بند ہیں اسکو نصف قطر کے ایک گہرے کرہ پر سطح رکھا گیا ہے کہ اس کے قاعدے کا مرکز کرہ کے بلند ترین نقطہ کو مس کرتا ہے۔ پانی کا وزن اسطوانے کے وزن کے مساوی ہے۔ ثابت کر دو کہ توازن قائم ہوگا اگر اسطوانہ میں پانی کے ارتفاع کا طول مساوات

$$\frac{1}{2} \text{ لا} - \frac{1}{2} \text{ لا} = \frac{1}{2} \text{ ف} - \frac{1}{2} \text{ لا} = \frac{1}{2} \text{ لا}$$

کی اصول کے درمیان واقع ہو۔

۴۱ — گردش مکانی نما کی شکل کا ایک بے وزن خول ایک متناہ خول میں لٹکا ہوا ہے جسکا مبدل قبل الذکر کے مبدل کا دو چند ہے اس کے اندر سیال ہے

ثابت کرو کہ زمین کے مرکز سے رفاصلہ پر دباؤ د ہے ایسا کہ

$$\text{لوک} \frac{d}{D} = \frac{J \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}{(N-1) \cdot \frac{1}{R_1}}$$

جہاں زمین کا نصف قطر ہے۔

اگر $N=1$ تو ثابت کرو کہ ایک کروی غبارے کا حجم جبکہ مادہ تمام سمتوں میں مساوی طور پر امتداد پذیر ہے ایسے سے بڑا ہوگا جب اس مساوات

$$J \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{M}{R_1} \left(1 - \frac{1}{N} \right)$$

سے معلوم ہو جہاں $M = \frac{J \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}{D}$ ، چٹک کی قدر D ، اور غبارے کا قدرتی نصف قطر k ہے۔ یہ معلوم ہے کہ جب غبارہ زمین سے اٹھتا ہے تو عین بجز دباؤ رہتا ہے۔ ایک نصف قطر قدرتی ہوتا ہے۔

۴۶ — ایک غبارہ کسی خاص لمحہ میں ف بلندی پر ہے، اس رفتار سے نیچے اتر رہا ہے اور افقی سمت میں اس رفتار سے حرکت کرتا ہے جو اس بلندی پر ہوا کی رفتار ہے۔ اگر ہوا کی رفتار بلندی کے متناسب ہو اور اگر کسی خاص مقام پر اترنے کے مقصد سے گیس کو اس طرح خارج کیا جائے کہ آثار کی رفتار مستقل رہے تو ثابت کرو کہ ابتدائی بلندی کے انداز سے میں فرس کی خط واقع ہونے سے جس نقطہ پر غبارہ پہنچتا ہے اس نقطہ میں

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad \text{کے } (k_1 + k_2)$$

کی خط پیدا ہو جائے گی جہاں $k = \frac{J \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}{D}$

۴۷ — ثابت کرو کہ سیمٹن (Smeaton) کے ہوا پمپ کی (ن ۱۴) دیں

ضرب میں جو کام ہوتا ہے وہ

$$\pi \left(\frac{1}{2} \text{ ب} \right) \left(\text{ن} + \text{ب} + \text{ل} \right) \text{لک} \left(\frac{1}{2} \text{ پ} \right) + \text{ب ل}$$

کے مساوی ہے اگر ہوا کے پھیلاؤ کو ہم تپشی فرض کر لیا جائے جہاں ل قابلہ کا اوزر ب نالی کا حجم ہے۔

۴۸۔ اگر آگنیف ہم تپشی ہو تو ایک کثیف کی ن دیں ضرب میں جو کام ہوتا ہے اس کو معلوم کرو۔

۴۹۔ حجم کے ایک قابلہ میں اگر ب گنجائش کے ایک کثیف کرنے والے پیمپ سے ہوا اس قدر تیزی سے داخل کی جائے کہ ایصال سے حرارت کا جو نقصان ہوتا ہے اس کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے تو ثابت کرو کہ ن ضربوں کے بعد قابلہ میں ہوا کا دباؤ کرہ ہوائی کے دباؤ کا (۱ + ن ب / ل) چہ گنا ہوگا۔ یہ معلوم کرو کہ قابلہ میں تپش کیا ہے اور چمکانے میں جو کام ہوا اسے دریافت کرو۔

نیز قابلہ میں ہوا کا دباؤ معلوم کرو جبکہ ایصال سے تپشی توازن پھر برقرار ہو جائے۔

۵۰۔ دی ہوئی کثیت اور نصف قطر کا ایک ٹھوس کر دی مرکزہ لچکدار سیال (د = ک ث) کے تجاذبی کرہ ہوائی سے گھرا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ دباؤ کا تعین کریوائی مساوات ہے

$$\text{فرز} - \left(\frac{1}{2} \frac{\text{فرز}}{\text{د}} \right) + \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{\text{ک}} \text{د} = ۰$$

کن شرطوں کے تحت دباؤ کی شکل لکھ ہو سکتی ہے۔

۵۱۔ اگر یہ ماں لیا جائے کہ زمین کے اندر مساوی کثافت کی سطحیں ہم مرکز کرے ہیں اور دباؤ اور کثافت میں ربط د = ک پ (ث - ث ۱) ہے جہاں ث وسط پر کی

کثافت ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{نث} = \frac{\text{واجب مالم ۲۲ ر کر}}{\text{رجب مالم ۲۱ ر کر}}$$

جہاں زمین کا نصف قطر ہے اور مرکز سے زیر بحث نقطہ کا فاصلہ۔
کیست کی تجاویز یا اکائی یہاں استعمال کی گئی ہے اور زمین کی فوری گردش کا
اثر نظر انداز کیا گیا ہے۔

۵۴۔ ایک ٹھوس جسم دو کعبوں میں مشتمل ہے جو متشاکلاً باہم ملائے گئے ہیں
لیکن مختلف مادے اور مختلف جسامت کے ہیں۔ ر جس ایک سیال میں اس طرح
تیرتا ہے کہ متشاکل سطح مستوی سیال کی سطح پر ہے۔ قانیت کی شرط معلوم کرو۔

۵۵۔ ایک ٹھوس جسم گردش مکانی نما کی شکل کا ہے اور انتصابی محور کے
ساتھ تیرتا ہے۔ اگر مرکز ثقل مرکز مابعدی بر منطبق ہو تو ثابت کرو کہ توازن قائم ہے۔

۵۶۔ ایک ٹھوس جسم گردش مکانی نما کی شکل کا ہے اور ایک مائع میں جس کی
کثافت مکانی نما کی کثافت کا ن گنا ہے تیرتا ہے۔ اگر مکانی نما کا ارتفاع
ایسا ہے کہ اس کا مرکز ثقل مرکز مابعدی کے اوپر رک بند ہی پر ہے تو ثابت کرو کہ توازن
کا ایک محل ایسا ہے جس میں محور انتصابی نہیں ہوتا اور قاعدہ پوری طرح مائع کے
ماہر رہتا ہے اگر ک γ (۱۔ ن) $\frac{1}{2}$ ۔

۵۵۔ ایک جہاز کے پہلو پانی کے قریب انتصابی ہیں اور ہٹائے ہوئے پانی کا
مرکز ثقل جی گہرائی پر ہے۔ جہاز کی کیت ک ہے۔ ایک چھوٹا بوجھ ط ک
جہاز پر متشاکلاً رکھا گیا ہے جس کی وجہ سے جہاز بقدر سے گہرائی کے اور
دوب جاتا ہے۔ اور جی + جی + جی ہو جاتا ہے۔ صغیر مقادروں کے مریوں
کو لحاظ کرنا ثابت کرو کہ

$$\text{مف جی} = \text{مے} - \text{ط جی} + \text{ط جی} - \frac{1}{4} \text{ط مے}$$

۵۶۔ ایک متجانس ناقص نما مائع میں اس طرح تیرتا ہے کہ اس کا اصل محور

ج و ج انتہائی ہے اور وزن (۱) ناقص نما کے وزن کا $\frac{1}{2}$) اوپر کے سرے
ج پر نسبت کر دیا گیا ہے اس طور پر کہ نیزہ کا مستوی مرکز جس سے گزرتا ہے۔ اگر ناقص نما کو اوسط
محور ب کے گرد ایک محدود زاویہ ط میں گھما دیا جائے تو ثابت کرو کہ جنت کا معیار
جو اس کو اس محل میں رکھے گا

د { ج - ۱ زا ج ط (۱) - ۲ زا ج ط } جب ط

ہوگا جہاں تراش (۱) کا خروج المرکز ہے۔

۵۷ — جہاز کے عرشہ پر کے وسطی خط سے ج اصلہ پر وسط مسک ٹی کیت رکھی گئی
ہے جسکی وجہ سے جہاز ایک طرف بقدر چھوٹے زاویہ ط کے جھک جاتا ہے۔
جہاز کا کل ہٹاؤ مرٹن ہے۔ ثابت کرو کہ اس کیت کی عدم موجودگی میں مرکز ثقل
کے اوپر مرکز البعد کی بلندی تقریباً $\frac{1}{2}$ ج کے مساوی ہوگی اور اس جملہ کو دوسرے
رتبہ تک صحیح بنانے میں مقدار

ک (ب - $\frac{1}{2}$ فرج) فرج

کا اس میں اضافہ کرنا پڑے گا۔ جہاں خط آب کے اوپر ک کے مرکز ثقل کی
بلندی ب ہے پسندے کی گہرائی تک ہے خط آب کی تراش کا رقبہ اور وجود کا
معیار ج ہے جن کا تقریباً معلوم ہونا فرض کر دیا گیا ہے۔

۵۸ — تجاذبی کیت میں ایک چھوٹا کر دی جوت (نصف قطر س) ہے جس کو
متجانس بے پیماسیال سے بھر دیا گیا ہے اور کر کے مرکز پر کی کشش بالکل
معدوم ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز پر کا سیالی دباؤ - $\frac{1}{2}$ ث ج مرا سے کم اور جوت کی سطح

پر کل دباؤ - (ج + $\frac{1}{2}$ ث) ۲۲ ث مرا سے کم نہیں ہو سکتا۔ جہاں سیال

کی کثافت ث ہے اور تجاذبی کیت کے تہ کو ذ سے قبیر کریں تو عنصر فرس کے
لئے جو مرکز سے کسی سمت میں کھینچا گیا ہے مرکز پر $\frac{1}{2}$ فرس کی اقل جبری قیمت ج ہے۔

۵۹۔ پانی کا ایک اسطوانی حوض ایک افقی محور پر جھول سکتا ہے۔ یہ محور حوض کی ایک عمودی تراش کا قطر ہے اور اسطوانہ کے ارتقاع کے وسطی حصہ کے نیچے واقع ہے۔ ثابت کرو کہ پانی باہر نکل پڑنے کے پیشتر حوض میں پانی کی مقدار اگر اس کی سطح آزاد ہو (یعنی اگر حوض پڑھکے نہ ہو) بہ نسبت اس پانی کی مقدار کے کم رہ سکے گی جو اس میں رہتی اگر اس پڑھکے نہ ہو۔ اگر قبل الذکر صورت میں گردش کے محور کے اوپر ہلکی سی بلندی تک پانی چڑھ سکتا ہو تو ثابت کرو کہ موخر الذکر صورت میں اس کی اس بلندی میں (ف + ۲ ک) - ف کا اضافہ ہو سکتا ہے جہاں گردش کے محور کے لحاظ سے اترنے والی عمودی تراش کا جہود کا معیار لکڑا ہے۔

۶۰۔ مساوی وزن اور نصف قطر کے دو گردی بند غباروں کے اندر ایک ہی قسم کی گیس کرہ موائی کے دباؤ π پر مساوی مقداروں میں ہے ایک غبار تو امتداد پذیر مادے سے بنایا گیا ہے اور دوسرا امتداد پذیر مادے سے تسلی لچک کی قدرع ہے۔ ان غباروں کو ایک ہی بلندی پر ایک ہلکی سی رسی کے سرور پر تھاما گیا ہے جو ایک چکنی چرخ پر سے گزرتی ہے اگر رسی کو کاٹ دیا جائے تو ثابت کرو کہ غباروں کی بلندیوں میں فرق جب وہ توازن میں ہوں

$$\frac{\pi}{8} \text{ ٹ} \text{ لوک } \frac{1}{8} \text{ ہوگا جہاں مساوات } ۲ - ۱ - \frac{\pi}{8} \text{ ج } \frac{\pi}{8} \text{ ٹ} = - \text{ کی}$$

حقیقی اصل ہے۔ رسی کا تناؤ π ہے اور دباؤ π پر ہوا کی کثافت π ہے۔

تجربہ کو مستقل فرض کر لیا گیا ہے۔

۶۱۔ ایک چکدار بے تنی ہوئی دائری جہلی کے محیط پر ایک استوار انگوٹھی ثبت کر دی گئی ہے۔ اس کے ایک رخ پر سیالی دباؤ عمل کرتا ہے جس سے جہلی ایک گردشی سطح کی شکل اختیار کر لیتی ہے۔ یہ معلوم کیا گیا کہ کوئی جھوٹا مربع جو بے تنی ہوئی حالت میں جہلی پر بنا جا جائے اور جس کا ایک ضلع ایک نصف قطر پر جمع ہو تو سیالی حالت میں ایک مستطیل میں تبدیل ہو جاتا ہے جس کے ضلعوں کی نسبت مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ جہلی کی یہ نئی شکل مخروط ہونی چاہیے۔ اس پر کے سیالی دباؤ

کا قانون معلوم کرو۔

۶۲۔ اگر یہ دیا جائے کہ پانی کا سطحی تناؤ ۲۰.۱ مئی پر ۸۱ ڈاؤن فی منٹ میٹر ہے اور $\frac{\text{فرسٹ}}{\text{ثرت}} = \frac{\text{تھو صابوں کے ایک ببلے کے پھیلاؤ کی شرح دریافت}}{۵۵}$ کر دیجیے پیمائش ت جڑ ہتی جائے۔

۶۳۔ زوج سیال کا ایک قطرہ اپنے مرکز میں سے گرنے والے ایک محور کے گرد یکساں رفتار سے گھومتا ہے اور سطحی تناؤ کے سوا کسی قوت کے زیر عمل نہیں ہے اس کی شکل کو ایک گردشی سطح کی شکل مان کر اور ماکو گردش کے محور پر مرکز سے ناپنے سے ثابت کرو کہ نصف الہاری مشنئی اس مساوات

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا} (۱ + \text{ک}^۲)}{۲ (۱ + \text{ک}^۲) - \text{لا} (۱ + \text{ک}^۲)}$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں لا استوائی نصف قطر ہے۔

۶۴۔ ایک نئی قدرتی نصف قطر لا کے قائم مستدیر اسطوانہ کی شکل کی ہے اور کامل طالع مادے سے بنی ہے جو مکونوں کی سمت میں امتداد نا پذیر ہے لیکن مکونینی دائروں کی سمت میں یکجہاں ہے۔ ٹھیک جیٹھے والی دو تہالیاں اس کے سروں پر اچھی طرح ثبت کر دی گئی ہیں اور پھر دئے ہوئے دباؤ کی گیس اس میں داخل کی گئی ہے۔ تہالیاں آزادانہ طور پر ایک دوسرے کے قریب آسکتی ہیں تاہم کہ نصف الہاری تراش کی تفرقی مساوات ہے

$$\frac{۲}{\text{فرس}} + \frac{۲}{\text{فرس}} = \text{م} (۱ - \text{لا}) \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} \right)^۳$$

جہاں م لچک اور دباؤ کا تفاعل ہے۔

تمام دباؤں کے لئے نلی کے صدی نصف قطر اخٹا تہالیں پر ۲ اور ا کی نسبت میں ہوتے ہیں۔

نلی کے مختلف ابتدائی طولوں کے لئے سب سے چوڑے نقطہ پر نصف الہاری

تراش کا اٹھائے اعظم $\frac{1}{2} (\frac{1}{4} - \frac{1}{8})$ ہے اور دوسرا صدی اٹھا ہے

$$\frac{1}{2} (\frac{1}{4} - \frac{1}{8})$$

۶۵۔ ک کیت کے صابونی جلیے میں ہوا ہے جو کیکہ بائل کی پابندی کرتی ہے۔ اور جلی کا تناؤ (ت) نصف قطر کی چھوٹی تبدیلیوں سے متغیر نہیں ہوتا۔ جلی کل لکڑی کے ٹکڑے چھوٹے اینتزازات کر رہی ہے۔ اگر جلی کی کروئی شکل میں کوئی تبدیلی

واقع نہ ہو تو ثابت کر دو کہ اینتزاز کا وقت $\frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$ ہے جہاں ہوا کا جمود نظر انداز کیا گیا ہے اور بلبلہ خلا میں رکھا گیا ہے۔

۶۶۔ ج مبدل کے ایک ذخیرہ کو ایک وتر کے گرد جو مرتب کے متوازی اور اس سے ک فاصلہ پر ہے ٹھاکرا ایک بند سطح حاصل کی گئی ہے۔ اگر اس میں ذ کثافت کا مائع بھر دیا جائے جو یکساں زاوی رقتار سے سے محور کے گرد گھوم رہا ہے اور اس کو اسی قسم کے مائع میں ڈوب دیا جائے اور اگر اس میں ایک سوراخ ہو جس میں سے بیرونی دائرہ دئی مائع کی آمد و رفت ہو سکتی ہے تو ثابت کر دو کہ محور سے ر فاصلے پر صدی تناؤ ہونے

$$\frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \text{ (ک-ر) اور } \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \text{ (م-ک-ر)}$$

۶۷۔ اگر ایک صابونی جلیے کے ذرات فاصلے کے محکوس م ر ج کے قانون کے بموجب ایک دوسرے کو دفع کریں اور اگر ذوہ ہو تو ثابت کر دو کہ $\frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{r}{g}} = 14$ رت م جہاں ر جلیے کا نصف قطر اور ت تناؤ ہے۔

۶۸۔ پیل کے ایک کروئی خول میں (نصف قطر ۱) آتا پانی زور سے داخل کیا گیا کہ اس کا نصف قطر تک پھیل جاتا ہے۔ اگر خول کی چپک کی شرح کنجھنے میں مہ ہو اور پانی کے چپکاؤ کی شرح ل تو ثابت کر دو کہ خول میں پانی کی مقدار ہے

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad \text{اور} \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \quad \text{اور} \quad \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

جہاں شاپانی کی کثافت ہے جیکہ اسکو نہ بچکا یا گیا ہو۔

اس سوال میں سب ذیل باتیں معلوم ہیں

۱ = ۲ سمر، ۵ سمر، ایک کرہ ہوائی (۱۰ لاکھ ڈالین فی مربع سنٹی میٹر) کے لئے پانی کا پچکاؤ = 5×10^5 ، غول کی موٹائی = ۵ ملی میٹر اور ایک مربع ملی میٹر تراش کے پتلی ۱۰ کے ٹیول کو دو چند کرنے کے لئے ۹۰۰۰ لاکھ ڈالین کی قوت درکار ہوتی ہے اگر اس کی ٹیپک مستقل رستہ بھر معلوم مقداروں کوں لگے۔ اس نظام میں معلوم کرہ اور ثابت کرہ میں پانی کی گتیت = ۵۲۵ گرام تتریا۔

۶۹ — ایک نصف کرہی فیبلہ پانی پر تیرا ہے اس کا نصف قطر ایسا ہے کہ اندرونی و بیرونی دباؤں کے فرق کو جو بیرونی دباؤ سے نسبت ہے وہ ایک صغیر مقدار ہے جسکا مربع نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ پیلے کے اندر پانی کی سطح کی شکل دریافت کرہ اور ثابت کرہ کو بیرونی آبائی سطح کے نیچے اس کی بڑی سے بڑی گہرائی ہے

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad \text{اور} \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \quad \text{اور} \quad \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

جہاں پیلے کا نصف قطر ہے اور فی اٹائی ربہائی اور ہوا کے لئے جو سطحی توانائی ہے اس کو پانی کے اکائی حجم سے ورانے کے ساتھ نسبت دیا ہے۔

۷۰ — گفڈ (Gaffard) کی ایجاد دی تین میں اسطوائے ہوئے ہیں اور ایک بڑا ہوا کا دھیرہ جس کی ہتھکنڈ خارج ہوا کی شے کے ساوی رنگی جاتی ہے۔ اسطوائوں کے فشار کے ایک دہرے پرے پرے دو کرہوں (Cranks) کے ساتھ ملے ہوتے ہیں اور اسے کٹاوت کے خارجہ اندر سے چھڑا جاتا ہے۔ پیلے اسطوائے میں ہوا اس قدر پچکا لی جاتی ہے کہ اس کا دباؤ ہی ہو جائے جو حرانہ میں ہے اور پھر مکملندن کھلتے ہیں اور ہوا خانہ میں ۱۰ اخل ہوتی ہے جیسے ایک فنر۔ اس کی تحلیل ہو جاتی ہے۔ دوسرا چھوٹا اسطوائہ اکجن کی طرح عمل کرتا ہے جس میں پچکی

ہوئی تو ضرب کے اس حصہ عمل میں خزانہ سے داخل ہوتی ہے اور ضرب کے بقیہ حصہ عمل میں پھیل کر کہ ہوائی کے دباؤ پر خارج ہو جاتی ہے۔ خارج ہوتے وقت اس ہوائی پیش ہشی ہوتی ہوتی ہے مگر اسطوانوں کے حجم $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{4}$ ہوں اور اگر پچکاؤ اور پھیلاؤ کو حرارت کو فرض کر لیا جائے تو ثابت کر دے کہ ہر ضرب میں پہلے اسطوان میں جو کام ہوتا ہے وہ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ہے اور دوسرے اسطوان میں

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \text{ ہے۔ } \frac{1}{8} \text{ کہہ ہوائی کا دباؤ ہے۔ (ڈاکٹر ایکسن)}$$

۱۷۔ غمت کر دی عجائس ٹھوس زمین پایاب سمندر سے گھری ہوئی ہے جو دور کے ایک جسم کے زیر کشش ہے۔ اگر ہوائی پر خزانہ اس کی کشش نظر انداز کر دی جائے تو ثابت کر دے کہ سمندر کی سطح کر دی رہی لیکن اس کا مرکز زمین کے مرکز سے بقدر اس فاصلے کے ہٹا جائیگا جو اس کے نسبت قطر کو تقاضی جسم کی کشش سیال کے ایک عنصر پر یہ ضرب دیتے سے حاصل ہوتا ہے۔

۱۸۔ زمین کی کشش اسی عنصر پر اگر زمین کو کر دی فرض کر لیا جائے اور اس کے گرد کم گہرائی کا ایک سمندر ہو اور اگر ہوائی کے ذرات کی کشش ایک دوسرے پر نظر انداز کر دی جائے تو ثابت کر دے کہ کر دی سمندر کی سطح جیت سادات

استوار پر مرکز گریز ثابت

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ زمین کی سطح پر باؤہ اصل کی قوت سے حاصل ہوگی۔}$$

۱۹۔ سیال کی کچھ مقدار ایک اادی لمبوترے کر دے نما کی سطح پر پھیلا دی گئی ہے۔ ثابت کر دے کہ سیال کی آزاد سطح بھی کر دے نما ہے (ا۔ استوار) یہ سیال کی گہرائی کو جو نسبت قطب پر کی گہرائی سے ہے وہی نسبت کر دے نما کے محور اعظم کو محور اسفر سے ہے۔

۲۰۔ اگر زمین کے گرد کم گہرائی کا ایک سمندر ہو تو ثابت کر دے کہ عرض بلد ہی ہے

قطع ناقص ہے جسکے محاور ۲ اور ۲ ب ہیں۔ مانع اور اسطوانہ دونوں اسطوانہ کے محور کے گرد یکساں راہی رزقار سہ سے گھومتے ہیں۔ ثابت کر دو کہ آزاد سطح کی ممکن شکل ہم ماسکی ناقصی اسطوانہ ہے اسکے محاور ۲ اور ۲ ب ہیں ایسے کہ

$$\text{سہ} (و + ب) = ۴ ت + ۲ (ا ب - و ب)$$

۷۹۔ متجانس مانع کی کمیت (ک) اضافی توارن میں ایک ثابت محور کے گرد یکساں راہی رزقار سے گھوم رہی ہے اس طرح کہ اس کی سطح کی ہیلیجیت (حصہ) چھوٹی ہے۔ اگر کمیت کا مرکز حصہ مرکب پر ایک لانتا ہی کثف مادی نقطہ کی سطح میں منجمد ہو جائے اور نقیہ حصہ (۱-۲) گ کی کثافت کو نسبت ۱-۲ میں گھٹا دیا جائے تو توازن کی صورت میں اس سطح کی ہیلیجیت کہا ہوگی اگر گردش کا وقت دہی مرص کما جائے جو پہلے تھا۔

۸۰۔ یکساں کثافت کا ایک ٹھوس ناقص نما اپنے اقل محور کے گرد گھومتا ہے۔ اور اس کے گرد مختلف کثافت کے متجانس مانع کا ایک غلاف ہے جسے یہ ساتھ لے رہتا ہے کل کمیت قانون قدرت کے بموجب کشش رکھتی ہے۔ ان شرائط کا معلوم کرنا مطلوب ہے جن کے پورا ہونے پر آزاد سطح ناقص مائی شکل اختیار کر سکے (Prof. Townsend Math of Ed. Tinus Vol. xxv)

۸۱۔ ت + ۲ کثافت کے ٹھوس کروں کی کچھ تعداد کثافت کے سیال میں متوازن ہے کل نظام ایک جوف کرہ میں ہے۔ اگر کل کمیت متوازن ہو تو ثابت کر دو کہ کروں کی کمیت کا مرکز جوف کرہ کے مرکز پر ہونا چاہیے۔ نیز اگر صرف دو کرے ہوں تو نقطہ تماس پر ان کے درمیان دباؤ ہوگا

$$\frac{۱۶}{۹} ت + ۲ ب = ۲ \left\{ \frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۲} \right\} + \frac{۲}{۲} (ا ب + ب)$$

جہاں ۱۶ ب کروں کے نصف قطر ہیں۔

۸۲۔ ایک ٹھوس متجانس ناقص نما کے اندرونی حصہ میں ایک ہم مرکز کرہ سی خول ہے جو بے پچک متجانس سیال سے بھرا ہوا ہے۔ کل مادہ قانون قدرت کی

بموجب کشتش رکھتا ہے۔ ثابت کر دو کہ مساوی دباؤ کی سطحیں مخروطی نما ہیں اور اگر اس نظام کی ایک معین سطح پر کوئی نقطہ ن ہو تو مرکز و میں سے گزرنے والی اور ن و پر علی الاقوام سطح مستوی پر کا حامل دباؤ $h + \frac{1}{2} \rho g r^2$ ہوگا جہاں h ایک مستقل ہیں جو مساوی دباؤ کی منتخب شدہ سطح پر منحصر ہیں۔

۸۳ — اگر ظرف غواص کو ایک ریخیر کے ذریعہ پانی میں لٹکایا جائے اور وہ پانی میں پوری طرح ڈوبا ہوا ہو تو ثابت کر دو کہ اس کا محور انتصابی نہ رہیگا جب تک کہ

$$(1 - \frac{1}{\rho}) \rho g - \frac{\rho g r^2}{4h}$$

مثبت نہ ہو جہاں ρ ظرف غواص کا وزن ہے، r اندرونی ہوا سے بٹائے ہوئے سیال کا وزن، h اندرونی ہوا کا حجم، ρ ظرف غواص کے مادے کی کثافت اضافی، $\frac{1}{2} \rho g r^2$ اندرونی مائع کی ہوا سطح کی عمودی تراش کے جوہر کا معیار، g اور $\rho g r^2$ ظرف غواص اور حجم h کے مرکز نقل کی گہرائیاں اس نقطہ کے نیچے جس پر ریخیر باندھ دی گئی ہے۔

۸۴ — ایک ظرف غواص اندر کی طرف سے ایک گردشی مکافنی نامشکل سے محدود ہے اس کا ارتفاع b اور قاعدہ کا نصف قطر a ہے۔ اگر پانی کی سطح کے نیچے ظرف کے قاعدے کی گہرائی l ہو تو ثابت کر دو کہ ظرف میں n لمبی تک پانی چڑھ جائیگا جہاں

$$n^2 = (b - a)^2 = (l - a)^2 (b - a)^2$$

n آبی بار پیکا ارتفاع ہے۔

نیز اگر ظرف غواص پوری طرح غرق ہو اور اس کو ایک چھوٹے زاویہ ط میں گھمایا جائے تو ثابت کر دو کہ استرداد میاں ہے

$$\left\{ \frac{1}{2} \rho g r^2 (b - a)^2 - \frac{1}{2} \rho g r^2 (b - a)^2 + \frac{1}{2} \rho g r^2 (b - a)^2 \right\}$$

جہاں k مستقل ہے جو b پر منحصر نہیں اور a پانی کی کثافت ہے۔

۸۵ — t_1 ، t_2 ، t_3 ، ثن کثافتوں کے مائعات کی ایک تعداد

قوت کے مجاذبی میدان میں متوازن ہے۔ اگر ایک ٹھوس کرہ ابتداءً سب سے اوپر کے مانع ثن میں پوری طرح ڈوبا ہوا ہو اور پھر اسکو آہستہ آہستہ نیچے ڈھکیلا جائے یہاں تک کہ یہ پوری طرح سب سے نیچے مانع ثن میں پوری طرح غرق ہو جائے اور اگر کرہ کا حجم بمقابلہ ہر مانع کے حجم کے چھوٹا ہو تو ثن ثابت کر دے کہ سیالی دباؤ کے خلاف جو کام ہوتا ہے وہ تقریباً

$$C \{ (C_1 - C_2) \text{ ث} + (C_2 - C_3) \text{ ث} + \dots + (C_n - C_{n+1}) \text{ ث} \}$$

$$+ (C_{n+1} - C_{n+2}) \text{ ث} \}$$

کے مساوی ہے جہاں C اور C کرہ کے ابتدائی اور آخری محلوں میں اس کے مرکز پر کے قوسے ہیں اور $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ ، حاصل سطحوں پر کے قوسے ہیں۔

۸۶ — دبیمجانس کرے ث کثافت کے بے پچک متباسب سیال میں غرق اور ساکن ہیں۔ کروں کے نصف قطرب اور b اور کثافتیں ρ اور ρ' ہیں۔ میتوں کی پیمائش مجاذبی اکائیوں میں کی گئی ہے۔ کل کمیت کو ایک استوار کردی لغاؤ میں بند کر دیا گیا ہے جس سے وہ عین بھر جاتا ہے۔ ثابت کر دے ث کثافت کے کرہ پر

$$\text{عمل کی نیوالی کشت اور داؤکی سب قوتیں اعمی قوت } \frac{4}{3} \pi \rho' \text{ ث} (b^3 - \rho^3) \text{ اور دفاعی قوت } \frac{4}{3} \pi \rho (b^3 - \rho^3) \text{ میں تحویل ہو سکتی ہیں جبکہ قبل الذکر}$$

دفاعی قوت لغاؤ کے مرکز سے اور مؤخر الذکر دوسرے کرہ کے مرکز سے باہر واقع کرے۔ ج لگانے کے مرکز سے اور د دوسرے کرہ کے مرکز سے زیر بحث کرہ کے مرکز کے فاصلے ہیں۔

۸۷ — کچھ مجاذبی کمیت جسکی سطح ہم قوہ سطح ہے سیال سے گھری ہوئی ہے۔ سیال کی کشش بالذات نظر انداز کیا جاسکتی ہے ثابت کر دے کہ کسی نقطہ پر کا دباؤ سطح پر کے

فہرست اصطلاحات

نوٹ اس اصطلاحات کو اردو حروف تہجی کے لحاظ سے ترتیب دیا گیا ہے۔

Water line area	آب خط رقبہ
Centre of buoyancy	اچہال کا مرکز
Surface of buoyancy	اچہال کی سطح
Calculus of variations	احصائے تغیرات
Inferior limits	ادنیٰ حدود
Flying wheel	اڑ پتہ
Restorative moment	استردادی معیار
Thermal capacity	استعداد حرارت
Meridional section	استوائی تراستر
Radiation	اشعاع
Relative equilibrium	اضافی توازن
Superior limits	اعلیٰ حدود
Extensible	استداد پذیر

Inextensible	استدادنا پذیر
Freezing machine	آبخادی مشین
Deflection	انحراف
Upward pressure	اوپر وار دباؤ
Apses	اوجین
Mean centre	اوسط مرکز
Conduction	ایصال
Load	بار
Barometer	بار پیم
Upper limit	بالائی حد
Vapour	بخار
Evolute	برہ پیم
Dilatation	لبسط
Incompressible	بے پچک
Lamina	پنیرا
Compression	پچکاؤ
Compressible	پچک پذیر
Metacentre	پس مرکز، مرکز مابعد
Paddle steamer	پنہابی جہاز
Lune	پہانک
Turn of a helix	پہیر (مروندہ کا)
Hold of a ship	پیشا (جہاز کا)
Screw	پیچ
Screw-steamer	پیچ بانی جہاز
Constant of gravitation	تجاذب کا مستقل

Gravitating solid	تجاذبی ٹھوس
Configuration	تشکیل
Counterbalance	تعدیل کرنا
Variation	تغیر
Righting moment	نقوی می معیار
Line of contact	تماسی خط
Tension	تناؤ
Tensile	تناوی
Kinetic energy	توانائی بالفعل
Potential energy	توانائی بالقوہ
Line of floatation	یرواؤ کا خط
Plane of floatation	تیراؤ کا مستوی
Surface of floatation	تیراؤ کی سطح
Floating bodies	تیرنے والے اجسام
Lintearia	نوبیہ
Self-attracting	جاذب بالذات
Life-belt	جان بٹی
Algebraical moment	جبری معیار
Couple	جفت
Product of Inertia	جمود کا حاصل ضرب
Film, membrane	جہلی
Oblate spheroid	چپٹا کرہ منہا
Annulus	چنبر
Thread	چوڑی (بیچ کی)

Boundary conditions	حدودی شرطین
Terminal conditions	حدی شرطین
Specific heat	حرارت نوعی
Adiabatic	ترناگذر
Convective equilibrium	حلی توازن
Water line	خط آب
Cycloid	خط تدویر
Line of action	خط عمل
Line of greatest slope	خط میلان اعظم
Sheli	خول
Period	دور
Bifurcation	دو شاخگی
Shaft	دبیرا
Impulsive tension	دعکاتناؤ
Wall-sided ship	دیوار پهلو جہاز
Sheet iron	ڈھلا ہوا لوہا
Intrinsic pot energy	ذاتی توانائی بالقوہ
Intrinsic equation	ذاتی مساوات
Quarter-period	ربعی دور
Areal section	رقبئی تراشش
Wrench	رنج
Hyperboloid	زائد نما
Hyperboloid of one sheet	زائد نما اک چادری
Hyperboloid of two sheets	زائد نما دو چادری
Saturn	زحل

Catenary	رنجیرہ
Catenoid	رنجیرہ نما
Stress	رد
Lower limit	ردن حد
Stern	سکاتن
Trilinear co-ordinates	سہ ٹی متحدہ
Fluid	سہ ہال
Perfect fluid	سیال کامل
Capillary curve	سہ ٹی محور
Soap bubble	صہ لہا ببل
Principal curvature	صہ رانچا
Principal axes	صہ رانچا محور
Principal tension	صہ رانچا
Anticlastic	صہ دانہ ٹی
Necessary & sufficient conditions	ضروری اور کافی شرطیں
Normal mode	طبعی مہیت
Strata	طبقات
Longitudinal	طولی
Deck	عشتہ (جہاز کا)
Transverse	موضعی
Nodoid	عقدہ ما
Element	عصر جز
Water-section	بیہ شجاس
Separability	فاصل آب
	مصل بذیری

Astronomical density

فلکی کثافت

Fathom

فیدم

Receiver

قابلہ

Rectangular hyperbola

قائم زائد

Hinge

قبضہ

Bow

قدامہ

Divisibility

قسمت پذیری

Parabola

قطع مکافہ

Force function

قوتی تفاعل

Force to a point

قوت مائل بہ نقطہ

Constraint

قید

Constraining forces

قید کرنیوالی قوتیں

Bibliography

کتابیات

Spheroid

کرہ نما

Crank

کرنیک

Centre of mass

کمیت کا مرکز

Step (of a helix)

گام (مروکہ کا)

Radius of gyration

گردش کا نصف قطر

Surface of revolution

گردشی سطح

Roulette

گرو دنیہ

Pitch

گھائی

Periphery, perimeter

گہیرا

Elastica

لدنیہ

Convolutions

لففہ

Anchor-ring

لنگر چلا

Sinuous	لہریلا
Hydrodynamical	ماحرکی
Hydrostatics	ماسکونیات
Focal conic	ماسکی مخروطی
Parameter	مبادل
Homogeneous	متجانس
Equilateral Hyperbola	مساوی الساقین اور زائد
Isosceles prism	مساوی الساقین منشور
Similar and Similarly situated	متساویہ اور متشابهہ اوضاع
Variable	متغیر
Variable density	متغیر کثافت
Convex	محدب
Position	محل
Axial plane	محوری مستوی
Helix	درتولہ
Helicoid	مروعلہ نما
Metacentre	مکبر یا بعد
Nucleus	مرکزہ
Centroid	مرکزہ بندی
Torsion	تورژن
Surfaces of equipressure	مساوی دباؤ کی سطحیں
Plane	مستوی
Momental ellipsoid	معیاری ناقص نما
Concave	مقعر

Modulus

مقیاس

Bodies under constraint

مقید اجسام

Paraboloid

مکافی بنا

Flexible surface

ملائم سطح

Unduloid

موج نما

Ellipsoid

ناقص بنا

Elliptic Integral

ناقصی تکمیل

Elliptic paraboloid

ناقصی مکافی بنا

Synclastic

بد انحنائی

Dew point

نقطہ شبنم

Downward pressure

نیچے وار دباؤ

Medial line

وسطی خط

Trim of a ship

وضع (جہاز کی)

Displaced fluid

ہٹایا ہوا سیال

Isothermal

ہم تپشی

Level

ہموار سطح

Air-tight

ہوا بند



p = pressure

د = دباؤ

p = perpendicular

ع = عمود

$$p = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

ع = $\frac{دباؤ}{فترلا}$

$P \propto p \sin \theta$

ن = نقطہ

P_{11} = Lagrange's nth coefficient

ع = لیجنڈر کا n واں سر

P = power

ط = طاقت

ρ = density

ت = کثافت

ρ = radius of curvature

ن = انحناء کا نصف قطر

σ = density

ت = کثافت

f = acceleration

س = اسراع

f = function

ف = تفاعل

F = force

ق = قوت

k = constant

ک = مستقل

k = radius of

س = گردش کا نصف قطر

K = quarter period

ک = ربعی دور

v = volume

ح = حجم

V = volume

ح = حجم

V = potential fn

ف = قوت تفاعل

W = weight

د = وزن

m = mass

ک = کمیت

M = mass

M = metacentre

g = acc. due to gravity

G = centre of gravity

S = Surface

s = length of an arc

C = constant

C = centre

C' = centroid

C = point

c = capacity

c = semi-axis

$W = \gamma \rho^c$

r = radius

r = distance

r, θ, ϕ = polar co-ordinates

r, θ, z = cylindrical co-ordinates

R = resultant

R = reaction

t = temperature

T = tension

T = absolute temperature

t = time

h = height

h = depth

ک = کیت

مرکز ثقل = مرکز ثقل

ج = اجزاء - اجزاء - اجزاء

ث = مرکز ثقل

س = سطح

مس = قوس کا طول

م = مرکز ثقل

ج = مرکز

ث = مرکز ثقل

ج = نقطہ

ک = گنجائش

ج = نیم محور

ر = راجہ

ر = راجہ

ر = راجہ

ر = راجہ

ر = راجہ

ر = راجہ

ر = راجہ

ر = راجہ

ر = راجہ

ر = راجہ

ر = راجہ

ر = راجہ

ε
ψ
ω
π
Σ
ξ, η, ζ
θ
δ

Sn u

en u

dn u

Am u

Colam u

ص
سا
سه
π
Σ
ض، ط، ظ

ط

ه

جن ء

عن ء

طن ء

خط ء

حم ء

ترقیم کی مختلف مجالس میں حسب تفصیل ذیل طریقہ ترقیم منظور ہوا۔

ا	ب	ج	د	ع	ف	گ
A	B	C	D	E	F	G
ح	آ	ث	ک	ل	م	ن
H	I	J	K	L	M	N
ط	پ	ق	ر	س	ت	ث
O	P	Q	R	S	T	U
و	ھ	ی	ما	نہ		
V	W	X	Y	Z		

انگریزی کے بڑے (Capital) حروف بالعموم ترجمہ میں بخط عربی لکھے جاسکتے
اور چھوٹے (Small) حروف بخط فارسی۔ معہذا بڑے حروف کے لئے
پہچانہ بھی ٹرا ہوگا۔

a	b	c	d	e	f	g	h	...
ا	ب	ج	د	ع	ف	گ	ح	...
A	B	C	D	...				
ا	ب	ج	د	...				
A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	...				
ا	ب	ج	د	...				

یونانی حروف

α	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ	κ	λ	μ
ا	ب	ج	د	ه	ز	ح	ط	ک	ل	م
ν	ξ	ι	ο	π	ρ	σ	τ	υ	φ	χ
ن	ط	ی	و	پ	ر	س	ت	ث	ف	خ

یونانی بڑے حروف چھوٹے حروف کی طرح لکھے جائیں گے لیکن ان کے آخر میں
بجائے ہ کے ل ہوگا، مثلاً عا، با، جا وغیرہ

